Classe de 1°S

Exercices Algèbre

1. Divers

1-1 : Logique

Deux clubs de tennis font une compétition. Ils ont décidé de réaliser la confrontation des trois meilleurs joueurs de chaque club. Chaque joueur joue trois parties à raison d'une partie par jour les jeudi, vendredi et samedi d'une même semaine.

Les joueurs du premier club se nomment David, Didier et Damien et ceux du second club Camille, Cyril et Charles.

Nous savons que les parties « David – Cyril » et « Didier – Camille » se sont tenues le même jour, que David a joué contre Camille le samedi et que Didier n'a pas rencontré Camille le jeudi.

Dire, en argumentant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

A – « David a rencontré Cyril le jeudi. »

B – « Didier a rencontré Camille le vendredi. »

C – « Damien a rencontré Charles le samedi. »

D – « Didier a rencontré Charles le vendredi. »

2. Premier et Second degré

2-1 : Premier degré

Robinets

Une pompe A met 15 minutes de plus qu'une pompe B pour vider un bassin. Les deux pompes en même temps mettent 56 mns pour vider le bassin. Quel temps faut il à chacune des deux pompes ?

Cycliste

Un cycliste va de A vers B en franchissant un col C puis revient. Sa vitesse moyenne en montée est de 10 km/h et en descente de 30 km/h. Pour se rendre de A à B , il met 1 heure exactement. Pour aller de B vers A, il met 1 h 40 mn. On désigne par x la distance AC et par y la distance CB .*(de A à C il n'y a que de la montée, de C à B que de la descente...)*

a. Etablir un systeme de deux équations satisfaites par x et y.

b. Résoudre le système et en déduire la distance AB.

Cycliste 2

Un cycliste met deux heures pour aller d'une ville A à une ville B, puis 2h 14mn pour effectuer le retour.

En montée sa vitesse moyenne est de 8 km/h, sur terrain plat de 12 km/h et en descente de 15 km/h. Sachant que les deux villes sont distantes de 23 km, déterminer les longueurs des montées, des plats et des descentes.

2-2 : Résolutions standard

1. Résoudre les équations suivantes :

a. $(x+1)(x+2)=(x+3)(x+4)+(x+5)(x+6)$ b. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{6}{5}$ c. $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}=\frac{x+5}{x+3}$

2. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $(x^2-2x-3)(x^2+2x+2)<0$ b. $3x+\frac{1}{2x}\leq\frac{5}{2}$ c. $\begin{cases}-x^2+x+1>0\\ -2x+5<0\end{cases}$

d. $\frac{27x^3-20x-7}{x^5+4x}>0$ e. $\frac{4-2x^4}{-2x^3-x-18}\leq 0$ f. $\frac{x^3-5x+4}{x^4-4}\leq 0$

g. $-x^4-x^2+12=0$ h. $\frac{6}{-x^2+x-1}\geq -2$ i. $6-x^2\geq\frac{13x^2-12}{6-x^2}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{x}{x+2}$ $-4x^4+13x^2-3=0$ $3x^2-7x=0$

$-2x^2+8=0$ $2x^2+7x-9=0$ $-\frac{1}{2}x^2+5x-\frac{25}{2}=0$

$-x^2-2x+3<0$ $27-3x^2=0$ $-x^2+7x=0$

$2x^2-9x+10=0$ $x^2-x\sqrt{2}+\frac{1}{2}=0$ $x^2-4x+3>0$

$\frac{4x-x^2}{(2x+1)(27-3x)}\geq 0$ $6(x-1)-\sqrt{x-1}=1$ $\frac{3x+2}{x-1}\leq\frac{x}{x+2}$

$3x^2-7x>0$ $-4x^2+13x^2-3\geq 0$

Correction (2. i)

$$\frac{6}{x^2}\geq 1+\frac{1}{6-x^2}\Leftrightarrow\frac{6(6-x^2)-x^2(6-x^2)-x^2}{x^2(6-x^2)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{36-6x^2-6x^2+x^4-x^2}{x^2(6-x^2)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{36-13x^2+x^4}{x^2(6-x^2)}\geq 0$$

Il faut factoriser $36-13x^2+x^4$ en posant $X=x^2$: $X^2-13X+36$ a pour racines 9 et 4, ce qui donne la factorisation $36-13x^2+x^4=(x^2-4)(x^2-9)$.

Il reste à faire le tableau de signes avec plein de lignes… et trouver que

$$x\in[-3;-\sqrt{6}[\cup[-2;0[\cup]0;2]\cup]\sqrt{6};3].$$

2-3 : Inéquations

Exercice 1

Pour chacun des cas suivants dire si l'inéquation ou équation **1** est équivalente à l'inéquation ou équation **2**. Si oui en résoudre une si non, résoudre les deux. Dans les deux cas expliquez votre réponse.

a.**1:** $(x+5)(x^2+1)<(3x-2)(x^2+1)$ **2 :** $x+5<3x-2$

b.**1:** $(2x-3)^2=(3x-1)^2$ **2 :** $2x-3=3x-1$

c.**1:** $\sqrt{x^2+4x+4}\geq\sqrt{9x^2-6x+1}$ **2 :** $\frac{1}{x+2}\leq\frac{1}{3x-1}$

Exercice 2

1. Vérifier que pour tout réel x, $-4x^3-13x^2+9=(x+3)\left(3-x-4x^2\right)$.

2. En déduire alors la résolution de l'inéquation $-4x^3-13x^2+9>0$.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$

(E) : $\dfrac{2x+1}{x-1}+\dfrac{x-7}{x+3}=4$ (S) : $\begin{cases}(2x+5)(1-x)\geq 0\\ 8x^2+10x-3>0\end{cases}$

2-4 : Second degré VRAI ou FAUX (c)

On justifiera les réponses.

1. Un trinôme, qui a pour discriminant -4, est strictement négatif sur $\mathbb{R}$.
2. Un trinôme, qui a pour discriminant -3 et vaut 1 en 0, est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
3. Le trinôme $3x^2-6x$ est strictement négatif sur $]0\,;2[$.
4. Le trinôme $(x-3)^2+2$ atteint son maximum en 3 ; ce maximum vaut 2.
5. La parabole de sommet $S(2\,;-2)$ passant par $A(0\,;-3)$ a pour équation : $y=-x^2+4x-3$.
6. Une forme factorisée de $-3x^2-7x+6$ est $(x+2)(3-5x)$.

Correction

1. **Faux** : Un trinôme qui a pour discriminant -4, est de signe constant, positif ou négatif sur $\mathbb{R}$.
2. **Vrai** : Comme il a un signe constant, il a le même signe qu'en 0 par exemple, soit $+$.
3. **Vrai** : $3x^2-6x=3x(x-2)$ est du signe de 3 à l'extérieur des racines, du signe contraire ($-$) entre les racines qui sont 0 et 2.
4. **Faux** : $(x-3)^2+2$ a un **minimum** en 3 qui vaut 2.
5. **Faux** : si on met sous forme canonique $-x^2+4x-3=-(x-2)^2+4-3=-(x-2)^2+1$, donc le sommet est $S(2\,;1)$.
6. **Faux** : j'ai honte d'avoir posé cette question…

2-5 : Mises en équation

Dangereux...

Un touriste se déplace dans un métro en utilisant un tapis roulant de 300 m de longueur dont la vitesse de translation est de 4 km/h. Il envisage de réaliser la performance suivante : notant A et B les extrémités du tapis, il parcourt ce tapis de A vers B dans le sens du déplacement du tapis puis de B vers A sans s'arrêter, sa vitesse restant constante. Le retour en A a lieu 10 min 48 sec après le départ de A.

Quelle est la vitesse du touriste ?

Géométrique...

Inscrire dans un demi-cercle de diametre $[AB]$ un trapèze isocèle $AMNB$ de manière que la somme des bases ($AB+MN$) soit égale aux 3/2 de la somme des côtés non parallèles.

Pour banquier matheux...

Une personne place 30 000 F en deux parties, à deux taux d'intérêt différents. La première somme, placée au taux le plus élevé, produit un intérêt annuel de 880 F et la seconde un intérêt annuel de 280 F . Sachant que la différence des taux est 0,5 %, calculer les deux sommes et les deux taux.

CamionVoiture…

Deux villes sont distantes de 450 km. Une automobile met 4 heures de moins qu'un camion pour aller de l'une à l'autre. Sachant que la vitesse horaire de l'automobile est supérieure de 30 km/h à celle du camion, trouver les vitesses de chaque véhicule.

Bateau…

Un bateau descend une rivière sur une distance de 26,5 km puis la remonte sur 22,5 km. Le voyage dure 8 heures. Quelle est la vitesse propre du bateau sachant que la vitesse du courant est de 2,5 km par heure ?

Correction

On note v la vitesse propre du bateau ; à la descente il va à la vitesse v + 2,5 et met le temps $\frac{26,5}{v+2,5}$; à la remontée il met le temps $\frac{22,5}{v-2,5}$; l'équation est alors

$$\frac{26,5}{v+2,5}+\frac{22,5}{v-2,5}=8 \Leftrightarrow \frac{53}{2v+5}+\frac{43}{2v-5}=8 \Leftrightarrow 192v-50=32v^2-200 \Leftrightarrow 32v^2-192v-150=0 .$$

On résout, ce qui donne les solutions $-0,73$ et 6,85 qui est la vitesse propre du bateau.

Avion…

Un avion vole avec une vitesse propre V, supposée constante par rapport à l'air. Il effectue la liaison aller et retour entre une ville A et une ville B distantes de 1000 km.

A l'aller il bénéficie d'un vent favorable de vitesse constante égale à 50 km.h^{-1}.

Au retour il a donc un vent contraire (soufflant toujours de A vers B) de même vitesse 50 km.h^{-1}.

La durée totale du vol aller et retour (en décomptant l'arrêt !) est de 4 heures et demie.

1. Montrer que la vitesse propre V de l'avion vérifie : $4,5\ V^2 - 2000\ V - 11\ 250 = 0$.

2. Déterminer alors V et comparer V avec la vitesse moyenne V_m de l'avion sur le trajet aller et retour. Le vent fait-il gagner ou perdre du temps ?

Cercle et tangente…

Soit Γ un cercle de centre $O(3, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4, 3).

Vérifiez que A est un point du cercle et déterminer l'équation de la tangente à Γ passant par A.

Ordonné…

Les points A et B ont pour abcisses -1 et 3 sur un axe gradué.

a. Quelle est l'abcisse du point M tel que $MA = MB$ sur cet axe ?

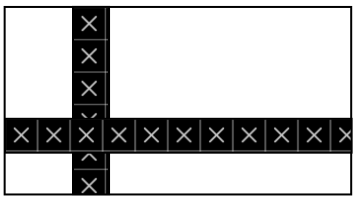
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x+1|=|x-3|$.

Approximatif…

a. Représenter deux carrés tels que les côtés diffèrent de 1cm au plus et les aires diffèrent de 1 cm^2 au moins (justifier la construction).

b. On sait que 12,37 est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-2} près et 12,39 est une valeur approchée de y par excès à 10^{-2} près également. A-t-on $x < y$?

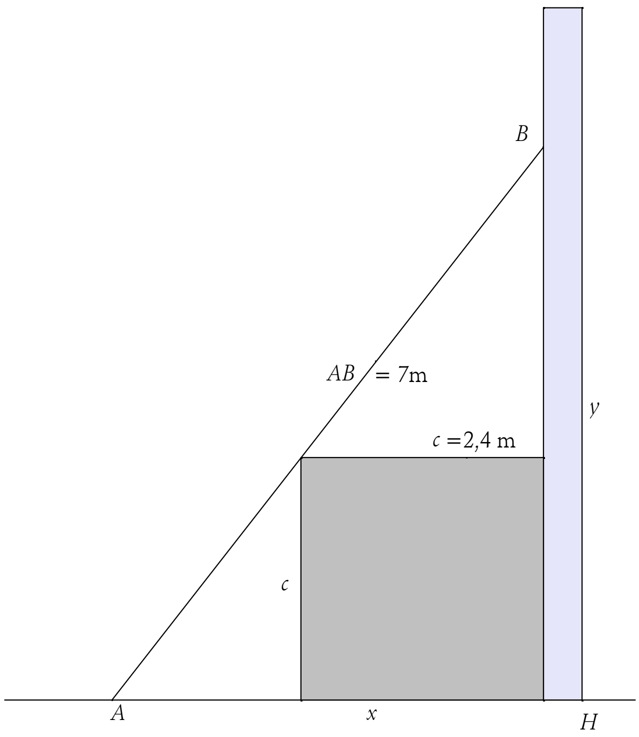
Drapeau…



Soit un rectangle de 6 mètres sur 3, séparé en quatre parties par deux bandes de largeur inconnue mais identique.

a. Déterminez cette largeur pour que l'aire de la surface hachurée soit égale à l'aire de la surface non hachurée.

b. Déterminez cette largeur pour que l'aire de la surface hachurée soit inférieure ou égale à la moitié de la surface non hachurée.



Echelle…

Une échelle de longueur 7 m s'appuie contre un mur et sur l'arète d'un bloc cubique de côté 2,4 m. On cherche la distance du pied du mur au pied de l'échelle. On désigne par x cette distance et par y celle du pied du mur au haut de l'échelle.

a. Montrer qu'il faut résoudre le système (1) :

$$\begin{cases} x^2+y^2=49 \\ \dfrac{y-2,4}{y}=\dfrac{2,4}{x} \end{cases}.$$

b. Montrer que ce système (1) est équivalent au système (2) :

$$\begin{cases} S^2-2P=49 \\ P-2,4S=0 \end{cases} \text{ où } S=x+y \text{ et } P=xy.$$

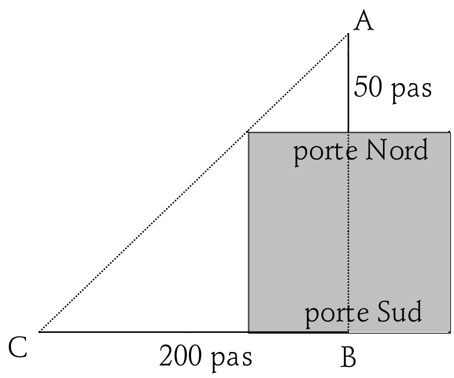
c. Résoudre (2) puis résoudre (1).

Ville…

Les villes chinoises étaient construites sur un plan carré. Les portes orientées aux quatre points cardinaux étaient au milieu des côtés. Dans la ville de Ki-Ai-Tou-Mou, on ne connaissait pas le côté de la ville. Mais le célèbre mathématicien Conton-Juska-Dice s'aperçut qu'en se plaçant en A, on voyait jusqu'à B, et qu'en se plaçant en C on voyait jusqu'en A en frôlant le coin de la ville.

L'angle ABC est rectangle, les longueurs connues sont indiquées sur la figure.

Saurez vous trouver le côté de la ville ?



<u>Correction</u>

On utilise Thalès ou la tangente de l'angle $\widehat{C}$ après avoir appelé x le demi-côté de la ville :

$\tan\widehat{C}=\dfrac{50}{x}=\dfrac{50+2x}{200}$, soit $2x^2+50x-10000=0$, soit les solutions 59,3 pas et $-84{,}3$ (pas valable).

La ville mesure donc 118,6 pas de côté.

Un libraire expert en comptabilité (Olympiades académiques 2005, Besançon)

Un ami libraire avait acheté un stock de stylos par lots de 5 et avait pu obtenir un bon rabais en achetant le même nombre de stylos plumes. Il avait acheté 5 **€** le lot de 5 stylos et 20 **€** le lot de 5 stylos plumes.

Il les revendit à l'unité en faisant un bénéfice de 20% sur chaque stylo vendu et de 25% sur chaque stylo plume.

Un soir en faisant le bilan de son stock et sa comptabilité, il se rendit compte qu'il était exactement rentré dans ses frais alors qu'il lui restait 504 pièces en stock dont peu de stylos, en tout cas moins de cinquante.

Combien de stylos avait-il acheté à son fournisseur ?

Correction

Appelons s et p les nombres de stylos et stylos plumes achetés. On a $s = p$ et le coût d'achat total est de 1 € par stylo, 4 € par stylo plume, soit au total $1\times s+4\times p=5\times s$.

Au bout d'un moment il se retrouve donc avec s' et p', de sorte qu'il est rentré dans ses frais en vendant un stylo 1,20 € et un stylo plume 5 €, ce qui lui a rapporté : $1,20\times(s-s')+5\times(s-p')=6,20s-1,20s'-5p'$.

On a donc l'équation $5s=6,20s-1,2s'-5p' \Leftrightarrow 1,2s'+5p'=1,2s$. Par ailleurs il lui reste 504 pièces, soit $2s=s'+p'+504$ avec $s'<50$.

On a donc $\begin{cases}1,20s'+5p'=1,2s\\ s'+p'+504=2s\\ s'<50\end{cases}$.

La deuxième ligne donne $p'=2s-s'-504$, soit $1,20s'+10s-5s'-2520=1,2s \Leftrightarrow 8,8s=3,8s'+2520$ ou encore $88s=38s'+25200 \Leftrightarrow 44s=19s'+12600$.

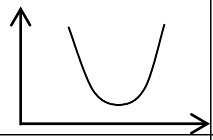
Comme s et s' sont des nombres entiers, il faut que s' soit divisible par 4 : posons $s'=4q$ et simplifions par 4 : $11s=19q+3150$ avec $q<\dfrac{50}{4}=12,5$.

Il reste à essayer les nombres de 0 à 12 pour trouver la solution : $q = 5$, ce qui donne $s = 295$, $s' = 20$ et $p' = 66$.

2-6 : QCM

1. $P(x) = ax^2 + bx + c$ est un polynôme du 2° degré, son discriminant est Δ.

Remplir le tableau suivant en vous aidant des informations données pour chaque cas :

	Signe de Δ	Signe de a	Nombre de racines	Factorisation (si possible)	Signe du trinôme	Allure de la courbe	Autre information
Cas 1		$a>0$	1				
Cas 2					x $P(x)$: $-$		
Cas 3							La parabole traverse l'axe des abscisses, son sommet a pour ordonnée 4
Cas 4							
Cas 5	$\Delta=0$	$a<0$					

Cas 6	$\Delta<0$						$P(5)=-3$
Cas 7		$a>0$					$c<0$

2. a. Construire un trinôme du 2° degré n'ayant pas de racine.

b. Construire un trinôme du 2° degré ayant 3 pour racine.

2-7 : Cours

Soit f la fonction trinôme définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

La forme canonique de la fonction f est définie par $f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Montrer que si $a>0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right]$.

3. Polynômes

3-1 : Factorisation

Exercice 1

Soit le polynôme $P(x)=x^3-2x-1$. Vérifiez que -1 est racine de P. On pose $x=-1+h$. Calculez $P(-1+h)$, factorisez h et déduisez en une factorisation de P. Que pensez vous de cette méthode ?

Exercice 2

Soit P le polynôme défini par $P(x)=6+10x+2x^2-2x^3$.

1. Montrer que $P(x)$ est factorisable par $x+1$.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$.

3. Résoudre alors l'inéquation (I) : $6+10x+2x^2-2x^3>0$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2-7x-2}{x^2-4}$.

1. Vérifier que pour tout réel x différent de -2 et 2, $f(x)=1+\dfrac{3}{2-x}-\dfrac{4}{x+2}$.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{(1+x)^2}=a+\frac{bx}{1+x}+\frac{cx}{(1+x)^2}.$$

3-2 : 3ème degré

Soit le polynôme du 3° degré $P(x)=x^3-6x^2-51x+280$.

1. Trouvez trois réels a, p et q tels que $P(x)=(x+a)^3+p(x+a)+q$.

2. On pose $X=x+a$. Résoudre l'équation $X^3+pX+q=0$ (on cherchera une racine simple α de l'équation puis on factorisera sous la forme $(X-\alpha)Q(X)$ où Q est un polynôme de degré 2.

3. Factoriser alors $P(x)$ et résoudre l'inéquation $P(x)>0$.

3-3 : 3ème degré mise en équation

On considère un cube d'arête x exprimée en centimètres.

Si on augmente les arêtes du cube de 3 cm alors son volume augmente de 1413 cm^3.

Déterminer x.

3-4 : 3ème degré

Soit f la fonction polynôme définie par : $f(x)=-4x^3+ax^2+bx+c$ où a, b et c sont trois réels.

1. Déterminer a, b et c sachant que -1 et 2 sont des racines de $f(x)$ et que la courbe représentative de f passe par le point $A(0\ ;4)$.

2. a. Montrer que $f(x)=2(x+1)(-2x^2+3x+2)$.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis $f(x) < 0$.

3-5 : Bhaskara

Quel est homme savant, le nombre qui multiplié par 12 et ajouté au cube du nombre est égal à 6 fois le carré augmenté de 35 ¿ (*Bhaskara, savant hindou du XII° siècle*)

3-6 : 4ème degré

Soit $P(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

a. Vérifier que $P(x)=\left(x^2+3x-10\right)^2$

b. Résoudre $P(x) = 0$.

c. Simplifier $f(x)=\dfrac{x^4+6x^3-11x^2-60x+100}{x^3+6x^2+6x+5}$

d. Résoudre $f(x) < 0$.

3-7 : 4ème degré

1. Factoriser le trinôme x^2-x-12.

2. Déterminer les réels a et b tels que le polynôme $f(x)=2x^4-4x^3-33x^2+ax+b$ soit divisible par x^2-x-12. Résoudre alors l'inéquation $f(x)\geq 0$.

3-8 : 6ème degré (c)

On veut déterminer les réels a et b de sorte que le polynôme $P(x)=ax^6+bx^5+1$ soit divisible par $\left(x+1\right)^2$ (dire qu'un polynôme $Q(x)$ divise un polynôme $P(x)$ revient à dire que $Q(x)$ peut se mettre en facteur dans $P(x)$).

1. Montrer que si $(x+1)$ divise $P(x)$, alors $P(x)=a(x^6+x^5)+x^5+1$.

2. Déterminer la factorisation de x^5+1 par $x+1$. En déduire la factorisation de $P(x)$ par $(x+1)$.

3. Déterminer alors la valeur de a puis celle de b. Effectuer enfin la factorisation de $P(x)$ par $\left(x+1\right)^2$.

<u>Correction</u>

1. Si $(x+1)$ divise $P(x)$, alors -1 est racine de P, soit

$$P(-1)=0\Leftrightarrow a\left(-1\right)^6+b\left(-1\right)^5+1=0\Leftrightarrow a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1.$$

On remplace b dans P : $P(x)=ax^6+\left(a+1\right)x^5+1=ax^6+ax^5+x^5+1=a\left(x^6+x^5\right)+x^5+1$.

2. On écrit x^5+1 avec $(x+1)$ facteur d'un polynôme de degré 4 :

$x^5+1=\left(x+1\right)\left(x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta\right)=x^5+x^4\left(\alpha+1\right)+x^3\left(\alpha+\beta\right)+x^2\left(\beta+\gamma\right)+x\left(\gamma+\delta\right)+\delta$,

ce qui donne $\alpha+1=0, \alpha+\beta=0, \beta+\gamma=0, \gamma+\delta=0, \delta=1$ d'où on tire

$\alpha=-1, \beta=-\alpha=1, \gamma=-\beta=-1, \delta=-\gamma=1$ que l'on remplace : $x^5+1=\left(x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)$.

On a donc $P(x)=ax^5(x+1)+\left(x+1\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)=(x+1)\left(ax^5+x^4-x^3+x^2-x+1\right)$.

3. Pour que $\left(x+1\right)^2$ vienne en facteur dans P, il faut pouvoir factoriser $x+1$ encore une fois, il faut donc que -1 soit racine du deuxième facteur :

$a\left(-1\right)^5+\left(-1\right)^4-\left(-1\right)^3+\left(-1\right)^2-\left(-1\right)+1=0 \Leftrightarrow -a+1+1+1+1+1=0 \Leftrightarrow a=5$,

et on a $b=a+1=6$.

Finalement $P(x)=5x^6+6x^5+1=(x+1)\left(5x^5+x^4-x^3+x^2-x+1\right)=(x+1)^2\left(5x^4-4x^3+3x^2-2x+1\right)$.

La dernière factorisation est à vérifier.

3-9 : Equation homogène

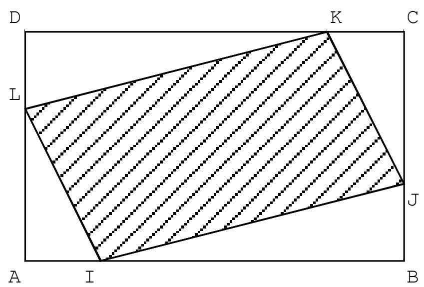
Soit l'inéquation $3x^4-7x^3+8x^2-7x+3>0$. En faisant le changement de variable $X=x+\dfrac{1}{x}$, montrer que cette inéquation est équivalente à l'inéquation $(x^2-2x+1)(3x^2-x+3)>0$. Résoudre.

3-10 : Scooters

Une entreprise fabrique 2000 scooters par an en 1999. A la suite d'un marché conclu avec une chaîne de supermarchés elle doit fournir 7000 scooters au total sur 3 ans. Quelle doit-être l 'augmentation annuelle de la production (en %) pour tenir ses objectifs ?

Dans un autre contrat, l'entreprise aurait du livrer au moins 10 000 scooters en 4 ans. Quelle inéquation doit on résoudre pour trouver le taux de croissance minimal annuel de la production ? *(ne pas la résoudre…)*

3-11 : Aires



$ABCD$ est un rectangle tel que $AB=5\ cm$ et $BC=3\ cm$.

I, J, K et L sont quatre points respectivement sur les segments $\left[AB\right]$, $\left[BC\right]$, $\left[CD\right]$ et $\left[DA\right]$ tels que $AI=BJ=CK=DL=x$.

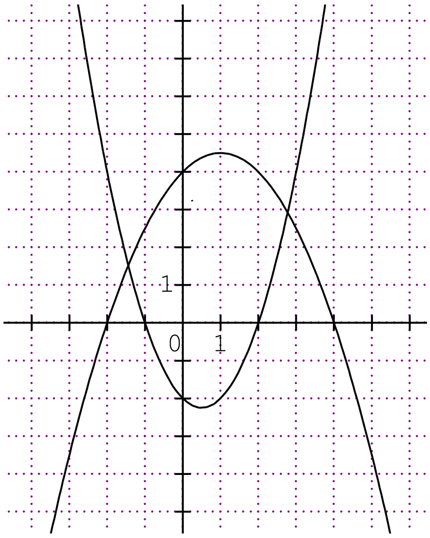
On appelle $f\left(x\right)$ l'aire du quadrilatère $IJKL$.

1. Justifier que x appartient à l'intervalle $\left[0\,;3\right]$.

2. Démontrer que pour tout x de $\left[0\,;3\right]$, on a $f\left(x\right)=2x^2-8x+15$.

3. En déduire l'aire minimale et la valeur en laquelle elle est atteinte.

3-12 : Courbes



Ci-contre, C_f et C_g sont les courbes des fonctions f et g définies par $f(x)=x^2-x-2$ et $g(x)=-\frac{x^2}{2}+x+4$.

1. Colorier en vert C_f. Justifier !

2. Déterminer le signe de $f(x)-g(x)$.

3. En déduire la position relative des courbes C_f et C_g en précisant les abscisses des points d'intersection.

4. Déterminer la fonction du second degré dont la représentation graphique coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et 3 et l'axe des ordonnées au point d'ordonnée -9.

4. Trigonométrie

4-1 : Cercle trigo, angles, formules

1. Les réels $-\frac{117\pi}{5}$ et $\frac{533\pi}{5}$ repèrent-ils un même point sur le cercle trigonométrique ? Si oui, placer ce réel sur le cercle.

2. Déterminer les lignes trigonométriques des réels $\frac{65\pi}{6}$ et $-\frac{44\pi}{3}$.

3. Sachant que $\tan x=\frac{4}{3}$ et $x\in\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$, déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin x$.

4. Soit x un réel différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, montrer que

$$\left(1+\tan x+\frac{1}{\cos x}\right)\left(1+\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)=2\tan x.$$

5. On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Déterminer la mesure principale des angles : $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)$, $\left(-\vec{v},-\vec{u}\right)$ et $\left(\alpha\vec{u},\alpha\vec{v}\right)$ où α est un réel non nul.

6. A-t-on $\frac{\pi}{3}=-\frac{29\pi}{3}\ [2\pi]$? Interpréter. Même question avec les réels : $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{85\pi}{6}$.

7. Placer sur le cercle trigonométrique les points M et N associés aux réels $-\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{8\pi}{5}$.

8. C est le cercle trigonométrique de centre O et muni du point I de coordonnées (1 ; 0)

a. Déterminer la mesure principale des angles orientés de vecteurs de mesures respectives $\frac{673\pi}{9}$; $-\frac{74\pi}{5}$; -2006π et 2007π.

b. Placer ces points sur C.

9. Compléter les pointillés :

$\sin(-x)=$........ $\cos(\pi+x)=$........ $\sin(\pi-x)=$........ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$........

$\cos(a+b)=$....................................

$\sin(a-b)=$....................................

$\sin 2a=$....................................

$\cos^2 a=$.................................... en fonction de $\cos 2a$

10. Compléter les cases blanches :

en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$				
$\sin x$				

11. Déterminer les lignes trigonométriques du réel $\frac{5\pi}{3}$

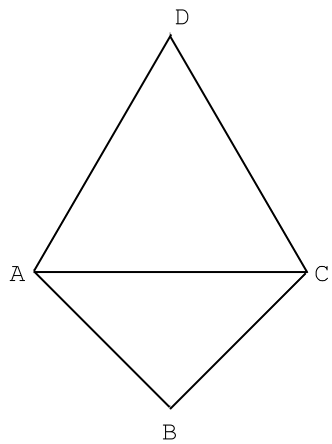
4-2 : Angles de vecteurs

Question de cours :

1. a. Enoncer la relation de Chasles avec les angles orientés de vecteurs.

b. Démontrer cette relation.

2. ACD est un triangle équilatéral direct. ABC et ADE sont des triangles rectangles isocèles directs en B et E.



a. Compléter la figure. Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (CD) et (BE) sont parallèles.

b. En utilisant la relation de Chasles, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$.

c. Justifier que le triangle ABE est isocèle puis en déduire la mesure de $\widehat{EBA}$.

d. En déduire la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right)$.

e. Déterminer alors une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BE}\right)$ puis conclure.

4-3 : Cosinus divers

La valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. a. Calculer la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{5}$.

b. En déduire : $\cos\frac{\pi}{10}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

2. a. Soit a et b deux réels. Vérifier que $a^4+b^4=\left(a^2+b^2\right)^2-2\left(ab\right)^2$.

b. En déduire que $\cos^4 x+\sin^4 x = 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

c. En déduire la valeur exacte de $\cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^4\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4-4 : Coordonnées polaires - 1

On pose I (1, 0) et A est le point de coordonnées polaires dans le repère orthonormal $\left(O\ ;\vec{i},\vec{j}\right)$ Unité graphique : 2 cm.

1. Placer les points I et A ainsi que le point S défini par $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OA}$.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes de A puis de S.
3. Quelles sont les coordonnées polaires de S ?
4. En déduire que $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et vérifier que $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.
5. En déduire les valeur exactes de $\cos\frac{5\pi}{8}$ et de $\sin\frac{3\pi}{8}$.

4-5 : QCM trigo

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, il y a au moins une bonne réponse. Le candidat doit cocher sur cette feuille les bonnes réponses. ***Aucune justification n'est demandée****.*

Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point*, chaque réponse fausse enlève* 0,25 point.

Si par application de ce barème, le total des points est négatif, la note à cet exercice est ramené à zéro.

Question 1

On note α une mesure de l'angle et θ sa mesure principale.

❑ $\alpha=-\frac{33\pi}{4}$ et $\theta=\frac{\pi}{4}$

❑ $\alpha=\frac{32\pi}{3}$ et $\theta=\frac{2\pi}{3}$

❑ $\alpha=\frac{86\pi}{7}$ et $\theta=-\frac{5\pi}{7}$

❑ $\alpha=-\frac{141\pi}{11}$ et $\theta=-\frac{9\pi}{11}$

Question 2

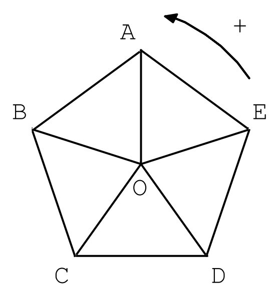
$ABCDE$ est un pentagone régulier.

❑ $\left(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{DE}\right)=\frac{3\pi}{5}\ [\ 2\pi\ ]$

❑ $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{OA}\right)=\frac{3\pi}{10}\ [\ 2\pi\ ]$

❑ $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OD}\right)=\frac{6\pi}{5}\ [\ 2\pi\ ]$

❑ $\left(\overrightarrow{AO}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)=\frac{2\pi}{5}\ [\ 2\pi\ ]$



Question 3

On sait que $y \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ et $\sin y = \frac{2}{3}$.

❑ $\sin(y-\pi) = \frac{2}{3}$

❑ $\cos^2 y = \frac{5}{9}$

❑ $\cos(2\pi - y) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

❑ $\cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$

Question 4

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormal. Dans le repère polaire $(O\,;\vec{i})$, les points A et B ont respectivement pour coordonnées polaires $\left(2\,;\frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{2\pi}{3}\right)$.

❑ $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\,2\pi\,]$

❑ $\left(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [\,2\pi\,]$

❑ $AB = \frac{\sqrt{17}}{2}$

❑ $AB = 2$

4-6 : Résolutions d'équations trigo

Exercice 1

a. Montrer que pour tout réel x, $2\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)$

b. Résoudre l'équation $\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x) = -1$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2

On considère l'équation (E_1) : $2\cos(4x) - 1 = 0$.

1. a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

b. Facultatif : représenter les solutions sur un cercle trigonométrique. Unité graphique : 4 cm.

2. a. Vérifier que pour tout réel x, $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

b. En déduire que l'équation (E_1) est équivalente à (E_2) : $16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1 = 0$ et donner les solutions de (E_2) dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

3. a. Montrer que l'équation (E_2) est équivalente au système $\begin{cases} X = \cos x \\ 16X^4 - 16X^2 + 1 = 0 \end{cases}$.

b. Résoudre l'équation (E_3) : $16X^4 - 16X^2 + 1 = 0$.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\cos\frac{11\pi}{12}$.

4-7 : Résolution générale du 3ème degré

Pour résoudre les équations du 3° degré, une idée a été de poser $x = u + v$ où u et v sont deux nombres inconnus…

1. Soit l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Montrer que cette équation se ramène à l'équation

$$\text{(E) } X^3+pX+q=0$$

en posant $x=X+\alpha$; on exprimera α en fonction de a.

2. On pose $X=u+v$ avec $uv=-\frac{p}{3}$. Montrer que $U=u^3$ et $V=v^3$ sont les racines d'une équation du second degré dont on précisera les coefficients en fonction de p et q.

3. A quelle condition sur p et q a-t-on des racines réelles ? Dans ce cas comment trouve-t-on une des racines de (E) ?

4. Appliquer cette méthode à l'équation $X^3+3X+2=0$

Correction

1. $x=X+\alpha$ donne donc

$$(X+\alpha)^3+a(X+\alpha)^2+b(X+\alpha)+c=0 \Leftrightarrow X^3+3\alpha X^2+3\alpha^2 X+\alpha^3+aX^2+2a\alpha X+\ldots=0 \text{ ;}$$

lorsqu'on regroupe les termes de même degré, on a

$$X^3+(3\alpha+a)X^2+\left(3\alpha^2+2a\alpha+b\right)X+\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=0.$$

Pour avoir quelque chose de la forme $X^3+pX+q=0$ il faut que le terme en X^2 soit nul, soit que $3\alpha+a=0 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{3}a$.

2. On pose $X=u+v$, soit $X^3+pX+q=(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+v^3+3uv^2+3u^2v+p(u+v)+q$.

On remarque alors que $3u^2v+3uv^2=3uv(u+v)$ d'où

$$u^3+v^3+3uv^2+3u^2v+p(u+v)+q=0 \Leftrightarrow u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0.$$

Comme on a pris $uv=-\frac{p}{3}$, on a alors $u^3+v^3+q=0$. Le problème revient donc à résoudre le système

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ uv=-\frac{1}{3}p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=-\frac{1}{27}p^3 \end{cases}.$$

Posons maintenant $U=u^3$, $V=v^3$, alors le système devient

$$\begin{cases} U+V=-q \\ UV=-\frac{1}{27}p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U^2+VU=-qU \\ UV=-\frac{1}{27}p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U^2+-\frac{1}{27}p^3=-qU \\ UV=-\frac{1}{27}p^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U^2+qU-\frac{1}{27}p^3=0 \\ UV=-\frac{1}{27}p^3 \end{cases}.$$

La première équation est obtenue en multipliant la première ligne par U, mais on pourrait multiplier par V sans rien changer donc U et V sont solutions de l'équation $U^2+qU-\frac{1}{27}p^3=0$.

3. On résout donc $U^2+qU-\frac{1}{27}p^3=0$: $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3$ qui doit être positif pour que l'on ait des solutions.

Lorsque c'est le cas on a $U_1=\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}, U_2=\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ d'où $u_1=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}, u_2=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ et finalement on a une racine réelle : $X=u_1+u_2$ et $x=u_1+u_2-\alpha$.

4. $X^3+3X+2=0$: $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3=2^2+\frac{4}{27}3^3=8$ d'où $u_1=\sqrt[3]{\frac{-2-\sqrt{8}}{2}}=-\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, u_2=\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$ et

$X=u_1+u_2=-\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{-1+\sqrt{2}}$, soit environ $-0,596$.

Une autre méthode fait intervenir la trigo…

1. Prouver que l'équation $\cos(3\alpha)=a$ avec $-1<a<1$ est équivalente à une équation du type (E) $X^3+pX+q=0$ avec $4p^3+27q^2<0$.

2. Soit p, q réels non nuls tels que $4p^3+27q^2<0$. Prouver qu'il existe r réel >0 et θ réel tels que (E) admette pour racines $r\cos\theta$, $r\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$, $r\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Calculer r et $\cos 3\theta$ en fonction de p et q.

4. Résoudre $X^3-4X+\frac{8}{3}=0$.