Suites numériques Exercices

1. Exercice 9

On suppose qu'un pin d'un âge compris entre 15 et 30 ans a une croissance régulière annuelle de 40 cm de hauteur. On note h(n) la hauteur en mètres du pin à l'âge n (pour n tel que $15 \le n \le 30$).

1. En supposant dans cette question que $h(15) = 22$, calculer $h(16)$ et $h(17)$.

2. Montrer que la suite $h(n)$ (pour n tel que $15 \le n \le 30$) est une suite arithmétique.

3. On suppose qu'un pin de 15 ans a une hauteur de 17 m. Quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 30 ans ?

4. On suppose qu'un pin de 28 ans a une hauteur de 28 m. Quelle était sa hauteur lorsqu'il avait 18 ans ?

5. Représenter graphiquement pour n compris entre 15 et 30 la hauteur d'un pin qui mesure 20 m à 15 ans.

2. Exercice 10

Les résultats seront donnés au centime d'euro près.

Le jour anniversaire de ses 18 ans, un jeune possédant 1 700 euros d'économies décide de placer son argent. Une banque lui propose deux sortes de placements :

• placement A : la totalité du capital est placée sur un livret d'épargne au taux de 3,5 % par an à intérêts composés ;

• placement B : 1 300 euros sont placés sur un livret «Jeune» au taux de 4,5 % par an à intérêts composés, et les 400 euros restants sur un compte courant non rémunéré.

Par la suite, on suppose qu'il ne fait plus aucun retrait ou versement.

1. On note C_n le capital qu'il aura acquis au bout de n années s'il choisit le placement A.

a. Calculer C_1 et C_2.

b. Démontrer que C_n est une suite géométrique et exprimer C_n en fonction de n.

2. On note T_n le capital qu'il aura acquis au bout de n années s'il choisit le placement B.

a. Calculer T_1 et T_2.

b. Exprimer T_n en fonction de n.

3. Le livret «Jeune» n'est possible que jusqu'à l'âge de 25 ans.

a. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
C_n							
T_n							

b. En déduire, en fonction du nombre d'années, le placement le plus avantageux.

3. Exercice 11

Une entreprise, propose pour recruter un nouvel employé deux types de rémunération :

Type 1 : Salaire initial de 1 200 € par mois avec augmentation annuelle du salaire mensuel de 100 €.

Type 2 : Salaire initial de 1 100 € par mois avec augmentation annuelle du salaire mensuel de 8 %.

1. Dans le cas de la rémunération de type 1, on note u(0) le salaire mensuel initial et u(n) le salaire mensuel après n années. Donner les valeurs de u(0), u(1), u(2).

2. Dans le cas de la rémunération de type 2, on note v(0) le salaire mensuel initial et v(n) le salaire mensuel après n années. Donner les valeurs de v(0), v(1), v(2).

3. Donner une expression générale de u(n) et v(n) en fonction de n. Calculer u(5) et v(5) ; u(8) et v(8).

4. Le nouvel employé compte rester 10 ans dans l'entreprise. Quelle est la rémunération la plus avantageuse ?

4. Exercice 12

Remarques préalables

- Dans cet exercice on assimile le nombre de bactéries A et B au bout de n semaines à des suites respectivement géométrique et arithmétique. Les nombres de bactéries sont des nombres entiers, mais les termes de la suite géométrique ne le sont en général pas. On fera observer ce problème aux élèves et on pourra agir sur le format des cellules correspondantes. On peut aussi introduire la suite $(E(1{,}025u_n))$ des parties entières de u_n et observer les valeurs ainsi obtenues pour déterminer le nombre de bactéries A.
- En situation d'activité de classe, les questions peuvent être beaucoup plus ouvertes. On peut, par exemple, demander aux élèves d'organiser les calculs pour répondre directement à la question 2. a.

Une culture de 4500 bactéries A augmente chaque semaine de 2,5% par rapport à la semaine précédente.

Une culture de 5000 bactéries B augmente de 140 bactéries par semaine.

On note u_n le nombre de bactéries A et v_n le nombre de bactéries B au bout de *n* semaines.

1. Calculer le nombre de bactéries A et le nombre de bactéries B au bout de quatre semaines et au bout de dix semaines.

2. veut déterminer au bout de combien de semaines le nombre de bactéries A dépasse celui de bactéries B. On peut pour cela compléter un tableau donnant u_n et v_n en fonction de n, en utilisant un tableur ou une calculatrice.

On a commencé à déterminer les valeurs de u_n et v_n avec un tableur :

1	**A**	**B**	**C**
2	n	u_n	v_n
3	0	4500	5000
4	1	4612,5	5140
5	2	4727,8125	5280
6	3	4846,007813	5420
7	4	4967,158008	5560
8	5	5091,336958	5700
9	6	5218,620382	5840
10	7	5349,085892	5980
11	8	5482,813039	6120
12	9	5619,883365	6260
13	10	5760,380449	6400

a. Expliquer par quelle formule on passe de la valeur de la cellule B3 à celle de la cellule B4, puis de la valeur de la cellule B4 à celle de la cellule B5.

b. Même question pour les cellules C3 et C4, puis C4 et C5.

c. A l'aide d'une calculatrice, déterminer à partir de combien de semaines il y a plus de bactéries A que de bactéries B (justifier en donnant en particulier les résultats numériques nécessaires à la compréhension de cette justification).

3. Au bout de combien de semaines le nombre de bactéries A augmente-t-il de 25% par rapport au nombre initial de bactéries de la culture A ? Expliquer et justifier la réponse.

5. Exercice 13

Le tableau suivant indique l'évolution de la population d'un pays au cours d'un siècle.

Année	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Population p_n en millions d'habitants	5,7	9,6	17	31	50	76

1. Calculer le coefficient multiplicateur qui permet d'obtenir la population en 1920 à partir de celle de 1900. En déduire l'augmentation en pourcentage de cette population.

Cette variation en pourcentage est appelée augmentation relative de la population au cours de cette période de 20 années.

2. Calculer de même les augmentations relatives au cours de chacune des périodes de 20 ans qui suivent.

3. Calculer la moyenne arithmétique m de ces augmentations relatives trouvées à la question précédente. En déduire le coefficient multiplicateur moyen qui ferait passer cette population de 5,7 millions à environ 76 millions en l'appliquant à chaque période de 20 ans jusqu'en 2000. On arrondira ce coefficient en donnant 2 chiffres après la virgule.

4. Vérifier que $1,026^{20}$ est voisin du résultat trouvé à la question précédente.

5. On décide de modéliser cette évolution de la population de ce pays à l'aide d'une suite géométrique. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5,7$ et de raison $q = 1,026$.

Calculer u_{20} , u_{40}, u_{60} , u_{80}, u_{100}.

Représenter sur le même graphique la suite (u_n) et l'évolution de la population au cours du siècle présentée dans le tableau. On placera les populations sur l'axe des ordonnées.

6. Si on pense qu'au cours des prochaines années, l'évolution de la population va se poursuivre au même rythme et que la suite (u_n) est un modèle satisfaisant pour la représenter, quelle population peut on prévoir en 2005 dans ce pays ?

6. France, septembre 2001

Voici un extrait d'une étude statistique de l'INSEE concernant l'évolution démographique au cours des années 1975–1990 dans deux arrondissements du département de la Drôme :

	Population			Taux de variation annuel (en %)	
Arrondissement	en 1975	en 1982	en 1990	1975–82	1982–90
Die dont communes rurales	32 168 19 022	33 572 20 309	35 207 21 574	+ 0,61 + 0,93	+ 0,60 + 0,76
Valence dont communes rurales	283 624 71 556	301865 82 110	320 370 94 059	+ 0,89 + 1,97	+ 0,75 + 1,71

(*Les questions 1 et 2 de l'exercice ne concernent que la ligne du tableau relative à l'arrondissement de Die.*).

1. Le tableau signale une augmentation annuelle de 0,61 % pour la période 1975–1982.

a. Déterminer le coefficient multiplicateur qui permet de passer de la population de 1975 à 1976. Quel est celui qui permet de passer de la population de 1976 à celle de 1977 ?

b. En déduire quel est le coefficient multiplicateur qui permet de passer directement de 1975 à 1982. Vérifier que la population recensée en 1982 est conforme à cette augmentation.

2. On suppose dans cette question que le taux de variation annuel dans l'arrondissement de Die est de 0,60 pour la période 1975–1999.

On note u_0 la population en 1975 et u_n celle de l'année 1975 + n ; on aura alors :

$$\begin{cases} u_0 = 32\,168 \\ u_{n+1} = 1,006 u_n \text{ pour tout entier } n \end{cases}$$

Ainsi, u_8 représente la population dans l'arrondissement de Die en 1983 (1975 + 8 = 1983).

a. Compléter le tableau figurant en *annexe 2* à l'aide de la calculatrice.

b. En déduire une estimation de la population en 1976, puis en 1983.

c. Ecrire u_n en fonction de n et reconnaître le type de croissance décrit par cette suite.

d. Estimer la population que l'on aurait dû trouver au recensement de 1999 (en fait, au recensement de 1999, la population était de 37 733).

3. *La question 3 concerne la ligne relative à l'arrondissement de Valence.*

a. Compléter le tableau préparé sur tableur et fourni en *annexe* 3, relatif à la population de l'arrondissement de Valence en 1982 et 1990.

b. Donner des formules, utilisables dans un tableur, permettant de calculer les cellules D3 et E3.

c. Expliquer pourquoi la plus forte progression en nombre d'habitants ne correspond pas à la plus forte progression en pourcentage.

7. Asie juin 2002

L'objectif de cet exercice est de comparer l'évolution des économies de deux personnes au cours d'une année.

* Pierre possède 500 euros d'économies le 1er janvier. Il décide d'ajouter 27 euros le 27 de chaque mois.

* Sophie ne possède que 400 euros d'économies le 1er janvier, mais elle décide d'augmenter ses économies de 10% le 27 de chaque mois.

1. De combien dispose chaque personne fin janvier ? fin février ?

2. Cas de Pierre.

On note U_0 la somme initiale reçue le 1er janvier, et U_n la somme disponible à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois. La suite (U_n) ainsi définie est représentée par le graphique ci–dessous.

a. Par lecture graphique, donner la nature de la suite (U_n), son premier terme et sa raison.

b. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n, et retrouver la nature de la suite (U_n).

c. Montrer que $U_n = 500 + 50n$. Calculer la somme dont dispose Pierre à la fin de l'année.

d. Calculer le pourcentage d'augmentation de ses économies entre le 1er janvier et le 31 décembre.

3. Cas de Sophie

On note V_0 la somme initiale reçue le 1er janvier et V_n la somme disponible à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois. Soit (V_n) la suite ainsi définie.

a. Démontrer que la suite (V_n) est la suite géométrique de raison 1,1 et de premier terme 400.

b. Montrer que $V_n = 400(1,1)^n$. Calculer la somme dont dispose Sophie à la fin de l'année, arrondie à un euro près.

c. Calculer le pourcentage d'augmentation de ses économies entre le 1er janvier et le 31 décembre.

d. La copie d'écran ci–dessous est celle d'un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
N														
2														
3	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	V_n	400												

Les colonnes sont repérées par des lettres A, B, C… ; les lignes sont repérées par des numéros 1, 2, 3… ; ainsi, la référence E3 repère la cellule se trouvant à l'intersection de la colonne E et de la ligne 3.

Quelle formule doit–on taper dans la cellule C4 pour y obtenir le terme correspondant de la suite (V_n) ?

On recopie cette formule vers la droite.

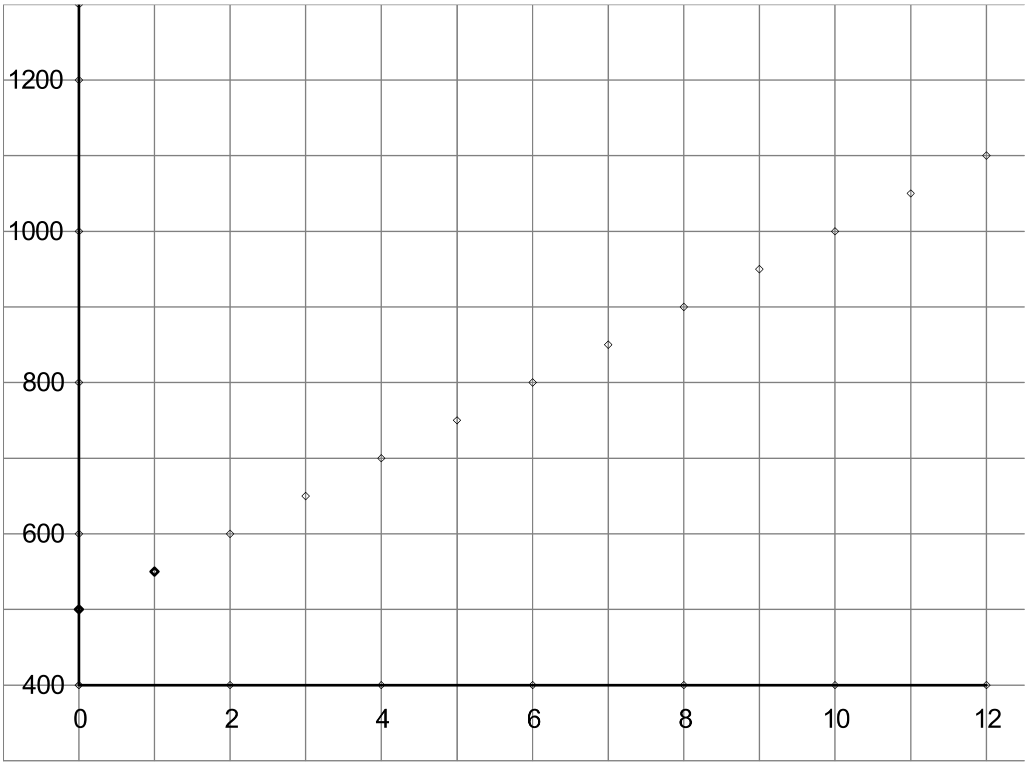
Quelle formule se trouve dans la cellule N4 ?

Reproduire le tableau ci–dessus et le compléter à l'aide de votre calculatrice (les résultats seront arrondis à un euro près).

4. Comparaison des deux cas

a. Tracer sur le graphique ci–dessous la représentation graphique de la suite (V_n).

b. Déterminer graphiquement le mois à la fin duquel les économies de Sophie deviennent supérieures à celles de Pierre.



8. Centres étrangers juin 2002

L'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques) répartit la population française de plus de 15 ans en plusieurs catégories. Parmi elle, on désignera par « actifs » la catégorie des personnes ayant effectivement un emploi et par « inactifs » la catégorie regroupant les scolaires, les étudiants, les retraités et les personnes sans emploi ou ayant un emploi à temps très réduit. Les données relatives à ces deux catégories sont répertoriées dans le tableau 1 fourni en annexe.

Partie 1 – Analyse de la journée des hommes

1. En 1987, le temps libre des hommes actifs représentait 15% d'une journée de 24 heures ou 1440 minutes. Déterminer, en minutes, cette durée.

2. Exprimer, en pourcentage de la durée d'une journée de 24 heures, le temps consacré aux tâches domestiques par les hommes inactifs en 1987.

On donnera ce pourcentage arrondi au centième.

3. A l'aide des tableaux 1 et 2 figurant en annexe, calculer le temps professionnel moyen dont disposent les hommes de plus de 15 ans en 1999 (actifs et inactifs). On donnera le résultat arrondi à la minute.

Partie 2 – Evolution de la durée quotidienne de temps libre des femmes françaises actives

1. Déterminer, en pourcentage, la variation de temps libre dont disposent les femmes actives entre 1987 et 1999. On arrondira le résultat au dixième.

2. D'après une autre étude, on peut faire l'hypothèse que le temps libre des femmes actives a augmenté de 2% tous les 3 ans sur la période 1987–1999.

Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle t_n le temps libre dont disposent les femmes actives en 1987 + 3 x n (exprimé en minutes) (*on arrondira tous les résultats à la minute).*

a. Vérifier que l'on trouve un temps libre t_1 des femmes actives en 1990 de 172 minutes. Déterminer le temps libre t_2 des femmes actives en 1993.

b. Quel terme de la suite correspond au temps libre dont dispose les femmes actives en 1999 ? Quelle est la durée en minutes de ce temps libre ?

c. Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n. En déduire la nature de la suite (t_n).

d. Exprimer t_n en fonction de t_0.

e. On suppose que cette tendance (augmentation de 2% tous les 3 ans) se poursuit au moins jusqu'en 2014. Calculer le temps libre quotidien dont disposeraient les femmes actives en 2014.

ANNEXE

Tableau 1

Découpage de la journée moyenne des Français en 1987 et en 1999.

Champ : Personnes de 15 ans et plus en France métropolitaine. D'après l'enquête « emploi du temps 1998–1999 », INSEE.

Définitions : les temps sont exprimés en minutes.

Temps physiologique : sommeil, toilette, repas, ….

Temps professionnel : profession, trajets liés au travail, études, …

Temps domestique : ménage, cuisine, courses, linge, soins aux enfants, …

Temps libre : pratiques sportives, culturelles ou ludiques, bricolage, jardinage, …

	Hommes				Femmes			
	Actif occupé		Inactif		Actif occupé		Inactif	
	1987	1999	1987	1999	1987	1999	1987	1999
Temps physiologique	683	682	772	760	693	695	762	757
Temps professionnel*	394	382	115	92	313	301	59	59
Temps domestique	112	119	165	175	229	227	317	288
Temps libre		224	339	375	169	183	264	301
Autre		33	49	38	36	34	38	35
Total	24 h	24 h	24 h	24 h	24 h	24 h	24 h	24 h

*La prise en compte des samedis et dimanches pour le calcul de ces moyennes explique ces temps professionnels journaliers relativement faibles.

Tableau 2

Répartition de la population française de plus de 15 ans selon le sexe et l'activité :

	Actifs occupés	Inactifs
Hommes	14 369 489	8 701 877
Femmes	12 172 992	12 826 991

Source : Recensement de la population 1999.

9. Pondichery, juin 2001

Un patron propose à ses employés deux modes d'augmentation de leur salaire mensuel.

Option A : Une augmentation fixe du salaire mensuel de 500 F au 1er janvier de chaque année.

Option B : Une augmentation de 5% du salaire mensuel de l'année précédente au 1er janvier de chaque année.

Dans les options A et B, l'augmentation n'a lieu qu'au 1er janvier et les salaires restent fixes les autres mois de l'année.

En 2000, Marcel et Claudine gagnent mensuellement 7000 F chacun. Marcel choisit l'option A et Claudine l'option B.

1. Calculer les salaires mensuels de Marcel et de Claudine en 2001, puis en 2002.

2. On note U_0 le salaire mensuel de Marcel en 2000 et U_n le salaire mensuel de Marcel n années après 2000.

a. Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

b. Exprimer U_n en fonction de n.

c. Calculer U_{19}. Interprétez ce résultat.

d. A partir de quelle année le salaire mensuel de Marcel sera–t–il d'au moins 12 000 F ?

3. On note V_0 le salaire mensuel de Claudine en 2000 et V_n le salaire mensuel de Claudine n années après 2000.

a. Quel est le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % ?

b. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n. En déduire la nature de la suite (V_n).

c. Exprimer V_n en fonction de n.

d. En déduire le salaire mensuel de Claudine en 2019.

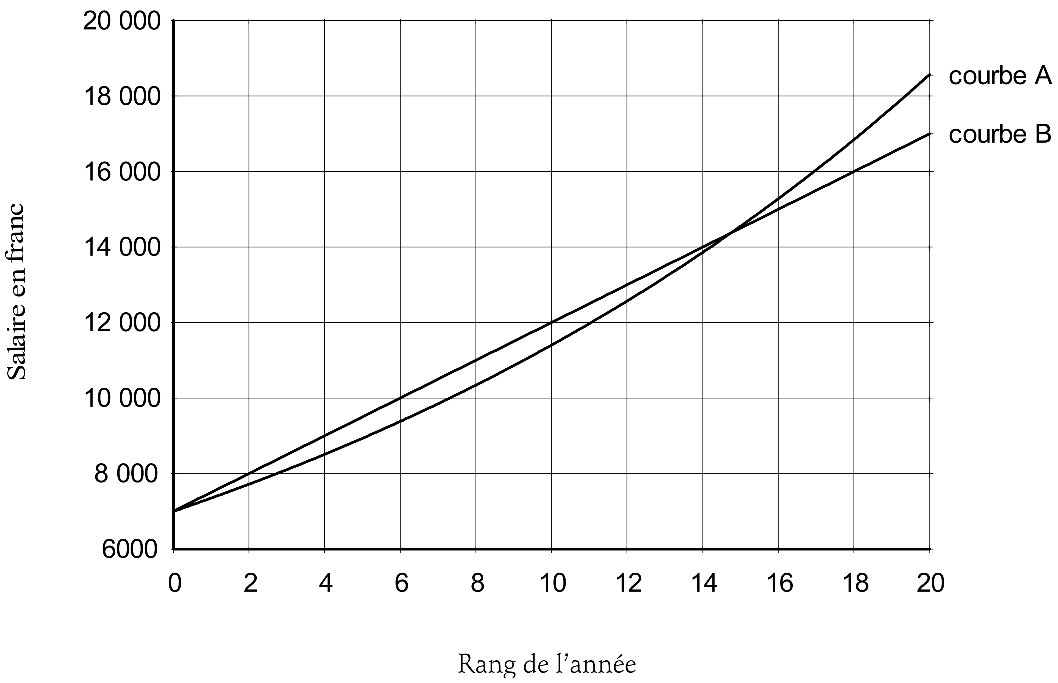
4. Marcel et Claudine prendront leur retraite en 2019. Lequel des deux partira avec le meilleur salaire ?

5. Le graphique ci–dessous reflète l'évolution des salaires mensuels de Marcel et Claudine. Vous utiliserez ce graphique pour répondre aux questions suivantes.

a. Quelle est la courbe représentant l'évolution des salaires mensuels de Marcel ? Justifier.

b. A partir de quelle année Claudine gagnera–t–elle au moins 12 000 F ?

c. A partir de quelle année le salaire mensuel de Claudine dépassera–t–il celui de Marcel ?



10. Pondichery, juin 2002

Un journal, vendu exclusivement sur abonnement, possède 25 000 abonnés au début de l'année 2000. Le service des abonnements estime que, d'une année sur l'autre, d'une part, 80% des lecteurs renouvellent leur abonnement et, d'autre part, qu'il y aura 20 000 nouveaux abonnés.

On note 0 l'année de référence 2000. Les années suivantes sont notées 1, 2, …

1. Dans le tableau ci–dessous :

a. Vérifier que le nombre estimé d'abonnés en 2001 sera de 40 000.

b. Compléter la ligne 2 du tableau, donnant le nombre d'abonnés.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année n	0	1	2	3	4	5
2	Abonnés U_n	25 000	40 000				
3	V_n	75 000					
4	V_n/V_{n-1}						

Les colonnes sont repérées par les lettres : A, B, C, … ; les lignes sont repérées par des nombres : 1, 2, 3… Ainsi, la référence B3 repère la cellule se trouvant à l'intersection de la colonne B et de la ligne 3.

c) Si l'on utilisait ce tableur pour compléter le tableau précédent, quelle formule devrait–on écrire dans la cellule C2 et recopier vers la droite jusque en G2 ?

2. On note U_n le nombre estimé d'abonnés durant l'année *n*.

a. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.

b. Cette suite (U_n) est–elle arithmétique ? Justifier la réponse.

c. Cette suite (U_n) est–elle géométrique ? Justifier la réponse.

3. Le directeur souhaite 100 000 abonnés pour rentabiliser son entreprise. Il calcule alors, pour chaque année à venir la différence V_n entre son objectif, 100 000, et le nombre estimé U_n d'abonnés.

On a donc $V_n = 100\,000 - U_n$.

a. Calculer V_0.

b. Dans la cellule B3, quelle formule doit–on écrire, puis recopier vers la droite dans le tableau de la question 1, pour compléter la ligne 3 ?

c. Compléter la ligne 3 du tableau de la question 1.

4. Dans cette question, on étudie la nature de la suite (V_n).

a. Compléter la ligne 4 du tableau de la question 1.

b. Que peut–on conjecturer pour la suite (V_n) ?

c. En admettant que cette conjecture soit vérifiée, montrer que $V_n = 75\,000 \times 0{,}8^n$.

5. a. En déduire U_n en fonction de n.

b. Combien d'abonnés peut–on estimer en 2010 ?

11. Exercice 19

Le tableau suivant indique l'évolution de la population d'un pays au cours d'un siècle.

Année	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Population P_n en millions d'habitants	5,7	9,6	17	31	50	76

1. Calculer le coefficient multiplicateur qui permet d'obtenir la population en 1920 à partir de celle de 1900. En déduire l'augmentation en pourcentage de cette population.

Cette variation en pourcentage est appelée augmentation relative de la population au cours de cette période de 20 années.

2. Calculer de même les augmentations relatives au cours de chacune des périodes de 20 ans qui suivent.

3. Calculer la moyenne arithmétique *m* de ces augmentations relatives trouvées à la question précédente. En déduire le coefficient multiplicateur moyen qui ferait passer cette population de 5,7 millions à environ 76 millions en l'appliquant à chaque période de 20 ans jusqu'en 2000. On arrondira ce coefficient en donnant 2 chiffres après la virgule.

4. Vérifier que $1,026^{20}$ est voisin du résultat trouvé à la question précédente.

5. On décide de modéliser cette évolution de la population de ce pays à l'aide d'une suite géométrique. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5,7$ et de raison $q = 1,026$.

a. Calculer u_{20} , u_{40}, u_{60} , u_{100}

b. Représenter sur le même graphique la suite u_n et l'évolution de la population au cours du siècle présentée dans le tableau. On placera les populations sur l'axe des ordonnées.

6. Si on pense qu'au cours des prochaines années, l'évolution de la population va se poursuivre au même rythme et que la suite (u_n) est un modèle satisfaisant pour la représenter, quelle population peut on prévoir en 2005 dans ce pays ?

12. Exercice 20

En vue d'une exploitation médicale, des chercheurs étudient la croissance de 2 plantes, le Linéa et l'Exposa.

Voici résumés ci-dessous les premiers relevés effectués, en centimètres.

	A	B	C	D
1		Linéa	Exposa	
2	Hauteur initiale	20	20	
3	Semaine 1	25	23	
4	Semaine 2	30	26,5	
5	Semaine 3	35	30,4	
6	Semaine 4	40	35	
7	Semaine 5			
8				

Les chercheurs se proposent de prévoir les hauteurs des 2 plantes pour les semaines suivantes, à partir des relevé des premières semaines. Ils décident d'appeler u_n la hauteur de Linéa au bout de n semaines et v_n celle d'Exposa au bout de n semaines ($u_0 = v_0 = 20$ est la hauteur initiale des 2 plantes).

Partie A : étude de Linéa

a. Donner u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Donner alors la nature de la suite (u_n). Justifier votre réponse.

c. Calculer la hauteur de Linéa au bout de 5 semaines puis 20 semaines.

d. Quelle formule les chercheurs doivent-ils entrer dans la cellule B7 afin de prévoir la taille de Linéa dans les semaines à venir ?

Partie B : étude d'Exposa

a. Donner v_0, v_1, v_2 et v_3.

b. Pour déterminer la nature de la suite (v_n), les chercheurs écrivent dans la cellule D3 du tableur la formule **= C3/C2** et la recopient vers le bas.

A l'aide de la calculatrice, remplir la colonne D alors obtenue (on arrondira les valeurs à 2 chiffres après la virgule).

c. Que suggèrent ces résultats quant à la nature de la suite (v_n) ? Justifier la réponse.

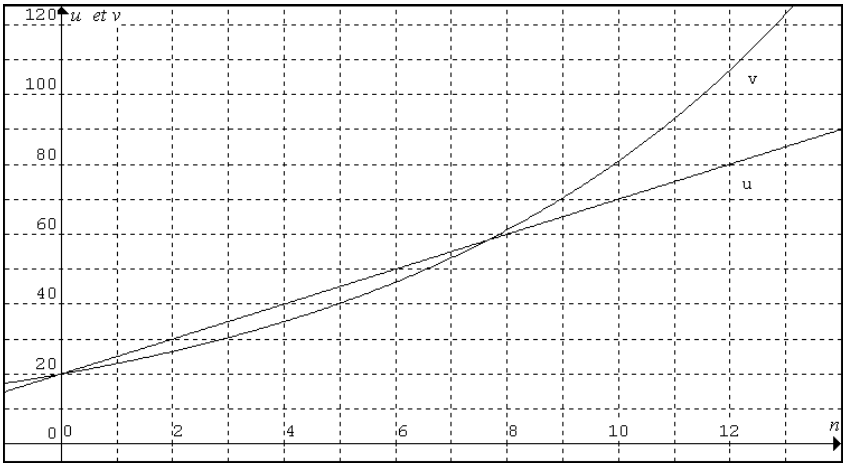
d. On admet que $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison 1,15. Calculer la hauteur de Linéa au bout de 5 semaines puis 20 semaines (arrondir à l'unité la plus proche).

e. Quelle formule les chercheurs doivent-ils entrer dans la cellule C7 afin de prévoir la taille d'Exposa dans les semaines à venir ?

Partie C : comparaison des 2 plantes

Pour les 12 premières semaines, on obtient les résultats suivants :

Semaine (n)	Linéa (u_n)	Exposa (v_n)
Semaine 0 Hauteur initiale	20	20
Semaine 1	25	23
Semaine 2	30	26,5
Semaine 3	35	30,4
Semaine 4	40	35
Semaine 5	45	40
Semaine 6	50	46,3
Semaine 7	55	53,2
Semaine 8	60	61,2
Semaine 9	65	70,4
Semaine 10	70	80,9
Semaine 11	75	93
Semaine 12	80	107



a. Comparer les croissances des 2 plantes.

b. La plante doit atteindre une taille minimum de 1 mètre avant d'être exploitée par l'industrie pharmaceutique. Quelle plante paraît la plus intéressante pour être utilisée dans le laboratoire pharmaceutique ? Pourquoi ?

c. Quel délai faut-il prévoir avant de commencer la fabrication du médicament ?

13. Exercice 21

(Les parties A et B sont indépendantes)

En 1990, la famille Pélimpo paye 1 500 **€** d'impôts sur le revenu.

A. Période de crise

L'impôt sur le revenu augmente de 2,5% par an. Soit $u_0 = 1\ 500$ l'impôt sur le revenu de l'année 1990 et u_n celui de l'année 1990 + n.

1. Quel est le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation de l'impôt ?
2. Calculer u_1. Que représente ce nombre ?
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
4. Exprimer u_n en fonction de n et de u_0.
5. Calculer u_9.

6. On a commencé ci-contre à déterminer les valeurs de u_n avec un tableur.

Vous trouverez en colonne A l'année, en colonne B l'entier n correspondant à l'année et en colonne C la valeur de u_n correspondante.

a. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule B3 du tableau avant de la recopier vers le bas ?

b. Après avoir mis u_0 dans C2, quelle formule faut-il saisir dans la cellule C3 du tableau, avant de la recopier vers le bas, pour obtenir les termes u_n ?

c. Compléter la colonne C du tableau. (La ligne 7 n'est pas à remplir).

	A	B	C
1	année	valeur de n correspondant	u_n
2	1990	0	
3	1991	1	
4	1992	2	
5	1993	3	
6	1994	4	1656
7	…	…	…

En réalité, pour l'année 1999, les revenus de la famille Pélimpo ont progressé et l'impôt sur le revenu vaut finalement 2 030 €.

B. Période de prospérité

Les fruits de la croissance sont redistribués sous forme de réduction d'impôt de 100 € par ménage et par an à partir de 2000. Soit $v_0 = 2\,030$ l'impôt sur le revenu de l'année 1999 et v_n celui de l'année 1999 + n.

1. Déterminer l'impôt sur le revenu de l'année 2000.

2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_n$?

3. Exprimer v_n en fonction de n et de v_0.

4. Déterminer en quelle année l'impôt sur le revenu de la famille Pélimpo passera en dessous de sa valeur de 1990.

5. On a fait un second tableau pour cette période de prospérité. Comme pour le précédent, on trouvera en colonne A l'année, en colonne B l'entier n correspondant à l'année et en colonne C la valeur de v_n correspondante.

a. Après avoir mis v_0 dans C2, quelle formule faut-il saisir dans la cellule C3 du tableau, avant de la recopier vers le bas, pour obtenir les termes v_n ?

b. Compléter la colonne C du tableau (la ligne 7 n'est pas à remplir).

	A	B	C
1	année	valeur de n correspondant	v_n
2	1999	0	
3	2000	1	
4	2001	2	
5	2002	3	
6	2003	4	1630
7	…	…	…

14. Exercice 22

Dans un gratte-ciel de 100 étages, il y a dans l'escalier de secours 18 marches par étage.

Julien est au sommet et Denis au bas de l'escalier. Ils décident par téléphone de se rejoindre en partant au même instant. Denis monte 2 marches par seconde et Julien en descend 4 dans le même temps.

On note u_0, u_1, u_2 ..., u_n le nombre de marches qui séparent Julien du bas de l'escalier, au départ puis au bout d'une seconde, de 2 secondes…, de n secondes.

On note v_0, v_1, v_2 ..., v_n le nombre de marches qui séparent Denis du bas de l'escalier, au départ puis au bout d'une seconde, de 2 secondes…, de n secondes.

Ainsi, $u_0 = 1800$ et $v_0 = 0$.

1. Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2.

2. Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ?

3. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

4. Calculer à quel instant Julien et Denis vont se rencontrer.

5. En déduire le nombre de marches parcourues par chacun et l'étage où ils se retrouvent.

15. Pondichéry avril 2003

Les parties A et B sont indépendantes.

En décembre 2002, Jean possède sur son compte bancaire la somme de 5 000 euros.

Partie A

À partir de janvier 2003, chaque début de mois, Jean reçoit sur ce compte 1 800 euros. On note u_0 la somme, en euros, en décembre 2002 ; ainsi $u_0 = 5000$. On appelle u_n la somme disponible en euros sur ce compte n mois après décembre 2002.

1. Calculer u_1, la somme disponible en janvier 2003 et u_2, la somme disponible en février 2003.

2. Préciser la nature de la suite (u_n), ainsi que sa raison.

3. On veut calculer les montants successifs de ce compte à l'aide d'un tableur.

Quelle formule écrire en B3 pour obtenir, en la « recopiant vers le bas », les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?

4. Exprimer (u_n) en fonction de n.

5. Calculer la somme disponible en décembre 2004.

	A	B
1	rang dumois n	u_n
2	0	5000
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

Partie B

On suppose maintenant que chaque mois, Jean dépense 60% de la somme disponible sur son compte. A chaque début de mois, il lui reste donc 40% de la somme disponible en début du mois, précédent, auxquels on ajoute la somme habituelle de 1 800 euros.

On note v_0 la somme, en euros, en décembre 2002 ; ainsi $v_0 = 5000$. On appelle v_n la somme disponible, en euros, sur ce compte n mois après décembre 2002. D'après ce qui précède, dans la suite de l'exercice, on admettra que, pour tout n : $v_{n+1} = 0{,}4v_n + 1800$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3.

2. La suite (v_n) est-elle géométrique ? Justifier votre réponse.

3. Pour calculer la somme disponible en décembre 2004, on cherche à déterminer v_n en fonction de n. Pour cela, on introduit une nouvelle suite (w_n), définie pour tout n, par $w_n = v_n - 3000$.

	A	B	C	D
1	rang du mois n	u_n	v_n	w_n
2	0	5000	5000	2000
3	800			
4	320			
5	128			
6	51,20			

a. Quelles formules écrire en C3 et en D2 pour obtenir, en les « recopiant vers le bas », les termes des suites (v_n) et (w_n) ?

b. On admet que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Exprimer w_n en fonction de n.

c. En déduire que $v_n = 800\ n + 3000$.

d. Calculer la somme, arrondie à 10^{-2} près, disponible en décembre 2004.

16. Amérique du Nord, juin 2003

La croissance de la population terrestre

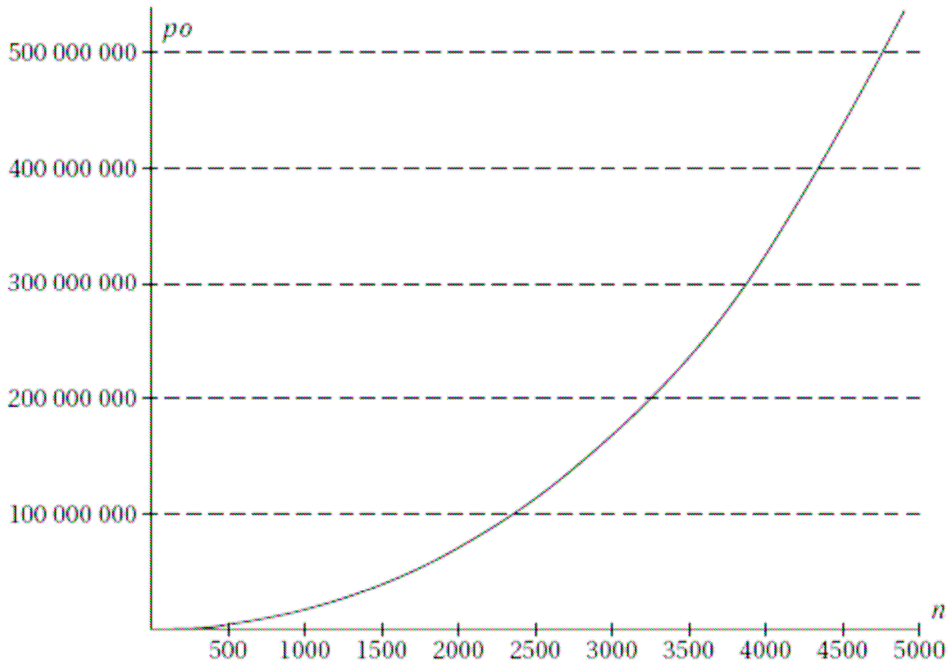
« Avant d'inventer le concept de taux de croissance, il a fallu se familiariser avec la série géométrique. . . »

La premier calcul de croissance démographique connu est dû à W. Petty et date de 1680. Petty calcule ici la croissance de la population depuis la sortie de l'arche de Noé. Il raisonne non pas à l'aide de taux de croissance, mais à partir de périodes de doublement de la population. Voici un tableau et une représentation graphique établis d'après ses résultats. (*n* désigne le nombre d'années écoulées depuis la sortie de l'arche de Noé, *po* la population en nombre de personnes et *pe* la période de doublement de la population en années).

Le début de l'ère chrétienne correspond à 2 700 années écoulées.

n	*po*	*pe*
0	8	
10	16	10
20	32	10
30	64	10
40	128	10
50	256	10
60	512	10
70	1 024	10
80	2 048	10
90	4 096	10
100	8 192	10
120	16 384	20
140	32 768	20

n	*po*	*pe*
170	65 536	30
200	131 072	30
240	262 144	40
290	524 288	50
350	1 048 576	60
420	2 097 152	70
520	4 194 304	100
710	8 388 608	190
1 000	16 777 216	290
1 400	33 554 432	400
1 950	67 108 864	550
2 700	134 217 728	750
3 700	268 435 456	1 000
4 900	536 870 912	1 200



1. Pour chacune des périodes suivantes, préciser si la croissance est exponentielle ou non et justifier. Dans le cas d'une croissance exponentielle, décrire cette croissance en utilisant un taux de croissance.

a. De 0 à 100 années après la sortie de l'arche.

b. De 420 à 3 700 années après la sortie de l'arche.

c. De 0 à 140 années après la sortie de l'arche.

2. L'auteur propose des valeurs intermédiaires sur la période 3 700 – 4 900. Pour obtenir ces valeurs intermédiaires, il fait une interpolation linéaire.

a. Vérifier que les valeurs proposées pour la population en 3 700, 4 000 et 4 300 correspondent bien à une croissance linéaire. Préciser les calculs nécessaires.

b. Avec la même hypothèse de croissance linéaire sur cette période, calculer la valeur manquante (population en 4 600). Détailler le calcul.

n	po
3 700	268 436 456
4 000	335 544 320
4 300	402 653 184
4 600	
4 900	536 870 912

3. Quel est le taux d'évolution de la population sur la période 3 700 — 4 900. Justifier.

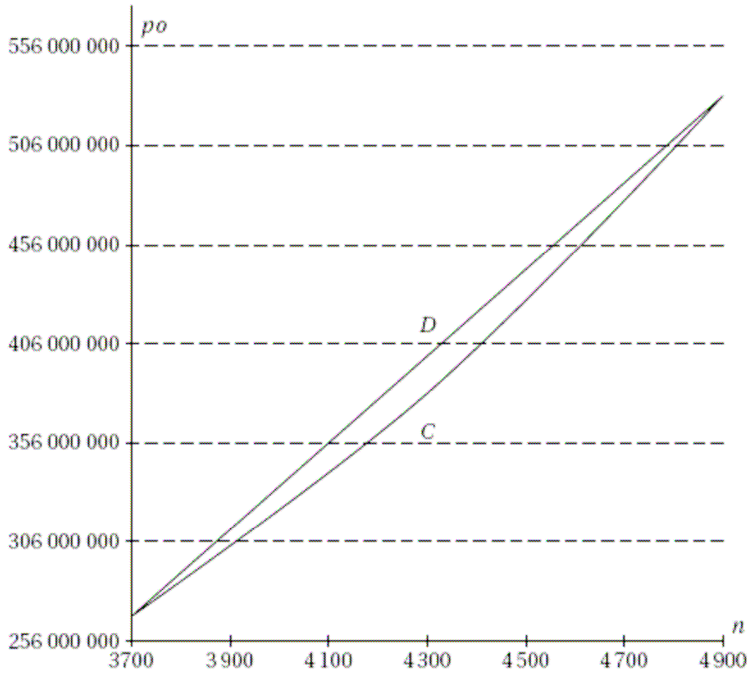
4. Si Petty avait raisonné en termes de croissance exponentielle sur la période 3 700 — 4 900, il aurait pu calculer le taux d'évolution sur la période 3 700 – 4 300 à partir du taux d'évolution sur la période 3 700 – 4 900, en calculant un « taux moyen d'évolution ».

a. Calculer le taux d'évolution sur la demi-période (entre 3 700 et 4 300 ou entre 4 600 et 4 900). Justifier. Donner le résultat sous deux formes: la valeur exacte puis un arrondi, sous forme de pourcentage, avec deux chiffres après la virgule.

b. En déduire la population en 4 300. Détailler le calcul. Arrondir ce résultat comme les autres valeurs du tableau.

n	po
3 700	268 436 456
4 000	319 225 354
4 300	
4 600	451 452 825
4 900	536 870 912

5. Associer, à chaque type de croissance, la courbe correspondante du graphique ci-dessous.



17. Amérique du Sud nov. 2003

Les deux parties sont indépendantes.

Pierre achète sa première voiture et se préoccupe de l'assurer. Il a entendu dire que s'il n'est responsable d'aucun sinistre, sa prime d'assurance diminuera chaque année.

Il sait aussi que le pourcentage maximal de réduction est limité à 50% (on dit que le bonus maximal est de 50%). En conséquence, la prime réduite ne peut être inférieure à la moitié de la prime « plein tarif ».

Partie A

Dans un premier temps, Pierre « imagine » qu'à partir d'une prime initiale de 450 €, sa prime pourrait diminuer de 20 € chaque année. Il se sait conducteur prudent et suppose donc qu'il ne sera responsable d'aucun sinistre.

1. On note u_n le montant, en euros, de sa prime d'assurance après n années sans sinistre.

Ainsi $u_0 = 450$, $u_1 = 430$. Calculer u_2 et u_3.

2. Combien d'années, Pierre doit-il attendre, pour atteindre le bonus maximal, c'est-à-dire pour que sa prime d'assurance soit égale à la moitié de sa prime initiale ?

Partie B

Pierre trouve qu'il doit attendre bien longtemps, et pense qu'il se trompe dans sonmode de calcul. Il s'adresse alors à un assureur qui lui explique, qu'en réalité, s'il n'est responsable d'aucun sinistre, sa prime d'assurance diminuera de 5% chaque année (on dira que le bonus annuel est de 5%).

Dans les questions 1. et 2. qui suivent, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au centime d'euro. On note v_n le montant, en euros, de sa prime d'assurance après $n$années sans sinistre. Ainsi $v_0 = 450$.

1. Calculer v_1, v_2, v_3.

2. La copie d'écran ci-après est celle d'un tableur :

0	A	B	C	D	E	F
1						
2	n	0	1	2	3	
3	v_n	450				
4	$v_n - v_{n-1}$					

a. Dans les cellules D3 et D4, quelles formules doit-on saisir pour les recopier vers la droite, afin de remplir ce tableau ?

b. Remplir le tableau à l'aide de votre calculatrice.

c. Interpréter le contenu de la cellule F4.

3. Combien d'années Pierre doit-il attendre pour atteindre le bonus maximal ? Préciser la méthode de calcul choisie.

18. Nouvelle Calédonie, nov. 2003

Dans un grand magasin, Damien est chargé d'une étude sur les ventes et les prix d'une eau minérale nommée BONO.

Partie 1

Damien a comptabilisé le nombre de bouteilles de BONO vendues lors des 5 premiers mois de l'année 2003. En utilisant un tableur il a ensuite cherché la part que représentent les ventes de BONO sur l'ensemble des eau minérales vendues.

Sur le tableau 1 de l'annexe, à rendre avec la copie, certains résultats ont été effacés.

1. Retrouver les valeurs numériques des cellules C4 et D3 et les faite figurer dans le tableau 1.

2. On donne les informations suivantes :

- En avril, un cinquième des bouteilles d'eau vendues était des bouteilles de BONO,
- En mai les ventes d'eaux minérales ont augmenté de 8,6 % par rapport au mois précédent.

Compléter alors par les valeurs numériques manquantes les colonnes E et F du tableau 1.

3. Quelle formule peut-on écrire dans la cellule G2 pour obtenir le résultat affiché ?

Comment peut-on obtenir le résultat de la cellule G3 ?

4. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B4 avant recopie automatique vers la droite pour obtenir les valeurs numériques des cellules de la ligne 4 ?

Partie 2

Damien doit s'intéresser maintenant aux prix de vente des bouteilles de BONO. Les bouteilles sont conditionnées par lots de 6 et peuvent aussi se vendre à l'unité.

Au mois de mars, il a noté que la bouteille coûtait 0,35 euro et que le lot de 6 bouteilles était en promotion et coûtait 1,75 euro.

En mars, plusieurs clients ont acheté des lots de 6 bouteilles et une bouteille séparée.

On désigne par n le nombre de lots achetés et par P_n le prix correspondant aux $6n+1$ bouteilles achetées.

1. a. Justifier que $P_n = 1{,}75n + 0{,}35$.

b. Quelle est la nature de la suite (P_n) ?

c. Compléter le tableau 2 de l'annexe.

d. Que peut-on constater pour l'évolution du prix unitaire moyen ?

2. L'un de ces clients a acheté de l'eau minérale BONO pour un montant de 16,10 euros. Combien a-t-il acheté de bouteilles ?

Annexe à l'exercice 1 : à compléter et à rendre avec la copie

Tableau 1

	A	B	C	D	E	F	G
1		janvier	février	mars	avril	mai	de janvier à mai
2	Nombre de bouteilles BONO vendues	6772	6840	7045	7256	7619	35532
3	Nombre total de bouteilles d'eau minérale vendues	33864	31091				
4	Pourcentage de bouteilles de BONO vendues (à 0,1 % près)	20,0	21,3				

Tableau 2

Nombre de lots	n	1	2	3	4	5
Nombre de bouteilles	$6n+1$					
Prix correspondant : P_n						
Prix unitaire moyen (à 0,001 près)						

19. Polynésie sept. 2003

La technique de « datation par le Carbone 14 » permet, en mesurant la radioactivité naturelle de certains échantillons, d'en donner l'âge. Par exemple, les peintures des grottes de Lascaux en France ont pu être datées à 13 500 ans avant Jésus Christ.

Cette technique repose sur deux principes :

• Tout organisme présente, de son vivant, la même radioactivité que le gaz carbonique atmosphérique.Nous l'appellerons radioactivité normale.On suppose cette radioactivité constante.

• À sa mort, sa radioactivité est divisée par 2 tous les 6 000 ans environ. Cette durée de 6000 ans est appelée une demi-vie.

Partie A

La radioactivité d'un échantillon sera exprimée en pourcentage de la radioactivité normale. On définit ainsi le taux de radioactivité de cet échantillon. Par exemple un morceau de bois fraîchement coupé a un taux de radioactivité de 100%. Ce même morceau de bois, 6 000 ans après, aura un taux de radioactivité de 50%.

Nous utilisons une feuille de calcul d'un tableur pour obtenir d'autres taux :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Âge de l'échantillon (en demi-vies)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	Âge de l'échantillon (en années)	0	6000	12000	18000	24000	30000	36000	42000	48000
3	Taux de radioactivité (en %)	100								

1. Compléter le tableau sur la feuille annexe. Les résultats seront arrondis au dixième.

2. En déduire une formule de calcul qui pourrait être saisie dans la cellule C3. Cette formule devra pouvoir être recopiée vers la droite jusqu'à la cellule J3.

3. Sur une feuille de papier millimétré, représenter la suite des taux de radioactivité en fonction de l'âge de l'échantillon en années. On prendra comme unités : 1 cm pour 2 000 ans en abscisse et 1 cm pour 10% en ordonnée.

4. À l'aide de la courbe constituée des segments de droite joignant les points successifs, déterminer graphiquement, à 1 000 ans près, l'âge d'un site archéologique, sachant que le taux de radioactivité d'un échantillon représentatif de ce site est de 20%.

Partie B

Dans cette partie, nous nous intéressons plus particulièrement à la datation d'échantillons qui ont au plus 200 ans et qui peuvent être datés par la technique de datation du carbone 14. Pendant 200 ans, la radioactivité va décroître de 2,3%.

Pour simplifier les calculs, nous considérons que nous sommes en l'an 2000.

1. Calculer le taux de radioactivité d'un échantillon représentatif de l'an 1800.

2. Quel taux de radioactivité devrait contenir un échantillon représentatif d'un tableau impressionniste réalisé en 1870 ?

Pour ce calcul, on utilisera une interpolation linéaire entre les années 1800 *et* 2000 ; *on pourra s'aider du tableau suivant*.

Années	1800	1870	2000
Taux de radioactivité			

3. On situe la « période impressionniste » du peintre Jean Renoir entre 1870 et 1880 ; il meurt en 1919. Lors d'une expertise, un tableau impressionniste attribué à Jean Renoir a été analysé avec un taux de radioactivité de 99,3% en l'an 2000, grâce au prélèvement d'un échantillon de peinture qui a pu être daté par la technique de datation du carbone 14.

Retrouver l'année de création du tableau et commenter le résultat.

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Âge de l'échantillon (en demi-vies)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	Âge de l'échantillon (en années)	0	6000	12000	18000	24000	30000	36000	42000	48000
3	Taux de radioactivité (en %)	100								

20. Antilles, juin 2004, 12 points (c)

Trois amis Bertrand, Claire et Dominique débutent dans trois entreprises différentes. Au premier janvier de l'année 2000, Bertrand et Claire débutaient avec un salaire mensuel de 1 500 €, tandis que Dominique commençait avec un salaire mensuel de 1 400 €.

Ils se proposent de comparer l'évolution de leurs salaires mensuels. On a donné en annexe 2, à rendre avec la copie, un tableau obtenu à l'aide d'un tableur. Une fois que tous les calculs auront été effectués, les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Partie A - Évolution du salaire mensuel de Bertrand

À partir de l'année 2001, au premier janvier de chaque année, le salaire mensuel de Bertrand augmente de 2,5%. On note b_n le salaire mensuel de Bertrand au 1er janvier de l'année $(2000+n)$, n étant un entier naturel. On a donc $b_0 = 1\,500$.

1. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule A3 du tableau de l'annexe 2, pour obtenir, par recopie automatique vers le bas, les différentes années ?

2. Calculer le salaire mensuel de Bertrand en 2001 puis en 2002.

3. Quel est le coefficient multiplicatif correspondant à cette augmentation de 2,5 % par an ?

4. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3 du tableau de l'annexe 2, pour obtenir, par recopie automatique vers le bas, les salaires mensuels de Bertrand jusqu'en 2008 ?

5. Montrer que, pour tout entier naturel n, $b_n = 1500\times(1{,}025)^n$.

6. a. Compléter la colonne C du tableau de l'annexe 2, jusqu'en 2008.

b. En supposant que le salaire mensuel de Bertrand évolue de la même façon après 2008, déterminer à partir de quelle année son salaire mensuel dépassera 2 000 €. Justifier.

Partie B - Évolution du salaire mensuel de Claire

À partir de l'année 2001, au premier janvier de chaque année le salaire mensuel de Claire augmente de 40 €.

On note c_n le salaire mensuel de Claire au 1er janvier de l'année $(2000+n)$, n étant un entier naturel. On a donc $c_0 = 1500$.

1. Calculer le salaire mensuel de Claire en 2001 puis en 2002.

2. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. Que peut-on en déduire pour la suite (c_n) ? Justifier.

3. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D3 du tableau de l'annexe 2, pour obtenir, par recopie automatique vers le bas, les salaires mensuels de Claire jusqu'en 2008 ?

4. En complétant la colonne D du tableau de l'annexe 2 déterminer à partir de quelle année le salaire mensuel de Bertrand dépasse celui de Claire.

Partie C - Évolution du salaire mensuel de Dominique

On appelle d_n le salaire mensuel de Dominique au 1er janvier de l'année $(2000+n)$, n étant un entier naturel. On a donc $d_0 = 1400$.

On note $u_n = d_n + 1000$. On admet que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

1. a. Montrer que $u_n = 2400\times(1{,}02)^n$.

b. Exprimer d_n en fonction de n.

c. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule E3 du tableau de l'annexe 2 pour obtenir, par recopie automatique vers le bas, le salaire de Dominique jusqu'en 2008 ?

d. Complèter la colonne E du tableau de l'annexe 2 jusqu'en 2008.

2. On suppose que jusqu'en 2015, chacun des salaires des trois amis continuera d'évoluer comme avant 2008. À partir de quelle année le salaire de Dominique sera-t-il le plus élevé des trois ?

Annexe 2 à rendre avec la copie

	A	B	C	D	E

1	Année	n	Salaire de Bertrand b_n	Salaire de Claire c_n	Salaire de Dominique d_n
2	2000	0	1500	1500	1400
3	2001	1			
4	2002	2			
5	2003	3			
6	2004	4			
7	2005	5			
8	2006	6			
9	2007	7			
10	2008	8	1827,60		1811,98
11					
12					
13					
14					

Correction

Partie A - Évolution du salaire mensuel de Bertrand

b_0 = 1 500.

1. Il faut ajouter 1 à A2, soit « =A2+1 ». A la copie A2 sera modifié en A3, A4, etc.

2. $1500\times 1,025=1537,5$ en 2001, $1537,5\times 1,025=1575,94$.

3. $1+\frac{2,5}{100}=1,025$.

4. Il faut multiplier le contenu de C2 par $1+\frac{2,5}{100}=1,025$, on met donc « =C2*1,025 ». A la copie C2 sera modifié en C3, C4, etc.

5. La suite b_n est une suite géométrique de raison 1,025 et de premier terme 1500, on a donc (cours) $b_n = 1500\times(1,025)^n$.

6. a. Voir ci-dessous.

b. Lorsqu'on continue le calcul on dépasse 2000 quand n = 12, soit en 2012.

Partie B - Évolution du salaire mensuel de Claire

À partir de l'année 2001, au premier janvier de chaque année le salaire mensuel de Claire augmente de 40 €.

On note c_n le salaire mensuel de Claire au 1er janvier de l'année (2000+n), n étant un entier naturel. On a donc c_0 = 1500.

1. En 2001 elle touche 1500+40 = 1540, en 2002 ce sera 2040 + 40 = 2080.

2. $c_{n+1} = c_n + 40$. La suite (c_n) est une suite arithmétique puisqu'on rajoute une constante (40) à chaque étape.

3. « =D2+40 ».

4. En 2007 le salaire mensuel de Bertrand dépasse celui de Claire.

Partie C - Évolution du salaire mensuel de Dominique

On appelle d_n le salaire mensuel de Dominique au 1er janvier de l'année $(2000+n)$, n étant un entier naturel. On a donc $d_0 = 1400$.

On note $u_n = d_n + 1000$. On admet que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

1. a. C'est du cours : $u_n = u_0 \times q^n$; comme $u_n = d_n + 1000$, $u_0 = d_0 + 1000 = 2400$, soit $u_n = 2400 \times (1,02)^n$.

b. Si $u_n = d_n + 1000$, on a $d_n = u_n - 1000$ donc $d_n = 2400 \times (1,02)^n - 1000$.

c. « = 2400*(1,02^B3)−1000 ».

d. Voir ci-dessous.

2. Le salaire de Dominique sera le plus élevé des trois à partir de 2010.

	A	B	C	D	E
1	Année	n	Salaire de Bertrand b_n	Salaire de Claire c_n	Salaire de Dominique d_n
2	2000	0	1500	1500	1400
3	2001	1	1537,50	1540	1448,00
4	2002	2	1575,94	1580	1496,96
5	2003	3	1615,34	1620	1546,90
6	2004	4	1655,72	1660	1597,84
7	2005	5	1697,11	1700	1649,79
8	2006	6	1739,54	1740	1702,79
9	2007	7	1783,03	1780	1756,85
10	2008	8	1827,60	1820	1811,98
11	2009	9	1873,29	1860	1868,22
12	2010	10	1920,13	1900	1925,59
13	2011	11	1968,13	1940	1984,10
14	2012	12	2017,33	1980	2043,78

21. Centres étrangers juin 2004, 10 points

Un industriel a acheté chez un fabricant, en 1999, une machine M neuve pour un prix de 45000 €.

1. On appelle valeur de reprise le prix de rachat par le fabricant de la machine M usagée pour l'achat d'une nouvelle machine M neuve. Cette valeur de reprise diminue chaque année de 20% de la valeur qu'elle avait l'année précédente.

On note R_n cette valeur de reprise, exprimée en euro, n années après l'achat de la machine neuve. On admet que, lorsque la machine vient d'être achetée, sa valeur de reprise est égale au prix d'achat.

Ainsi, $R_0 = 45\,000$.

a. Vérifier que $R_1 = 36\,000$.

b. Donner l'expression de R_{n+1} en fonction de R_n.

c. En déduire la nature de la suite (R_n), puis exprimer R_n en fonction de n.

2. Chez le fabricant, le prix de vente de la machine M neuve, exprimé en euro, augmente de 1 000 € chaque année. On note P_n ce prix l'année $1999+n$. P_0 étant égal à 45 000, exprimer P_{n+1} en fonction de P_n, puis P_n en fonction de n.

3. Cinq ans se sont écoulés.On suppose que l'industriel projette d'acheter à nouveau une machine M neuve, identique à celle achetée en 1999, tout en revendant cette dernière au fabricant. Ces transactions s'effectuant dans les conditions des questions 1. et 2., quelle somme, en euro, l'industriel doit-il débourser ?

4. On constate qu'après 10 années écoulées, l'industriel serait obligé de débourser environ 50 168 € pour acheter une machine M neuve, dans les conditions des questions 1. et 2.

a. Donner le détail des calculs aboutissant à ce résultat.

b. Quel serait alors le pourcentage d'augmentation entre la dépense en 1999 et la dépense en 2009 ?

5. On décide d'utiliser un tableur pour savoir au bout de combien d'années la somme à débourser par l'industriel pour une nouvelle machine M dépassera sa dépense de 1999, à savoir 45 000 €. Pour cela, on crée une feuille de calcul en adoptant la présentation suivante :

	A	B	C	D	E
1	Années	Nombre d'années écoulées	Prix de vente	Valeur de reprise	Somme à débourser
2	1999	0	45000	45000	
3	2000	1		36000	
4	2001	2			
5	2002	3			
6	2003	4			
7	2004	5			
8	2005	6			
9	2006	7			
10	2007	8			
11	2008	9			
12	2009	10			50168

a. Quelle est la formule à saisir en C3 avant de la recopier vers le bas ?

b. Quelle est la formule â saisir en D3 avant de la recopier vers le bas ?

c. Quelle est la formule à saisir en E3 avant de la recopier vers le bas ?

d. Vérifier que c'est seulement au bout de 8 années écoulées que l'industriel devra débourser plus de 45000 €.

22. France, juin 2004, 11 points (c)

PROGRAMME D'ENTRAINEMENT

Aline, Blandine et Caroline décident de reprendre l'entraînement à vélo chaque samedi pendant 15 semaines. À l'aide d'un tableur, chacune a établi son programme d'entraînement. Elles parcourent 20 km la première semaine et souhaitent effectuer ensemble une sortie la quinzième semaine.

L'annexe reproduit l'état final de la feuille de calcul utilisée. La valeur de certaines cellules a été masquée.

Partie A: Programme d'entraînement d'Aline

La distance parcourue parAline chaque semaine est représentée sur le graphique de l'annexe et certaines distances figurent dans la colonne B du tableau.

On note $U(n)$ la distance parcourue la n-ième semaine. Ainsi $U(1) = 20$ et $U(15) = 118$.

1. En utilisant des valeurs de la colonne B et le graphique :

a. Conjecturer la nature de la suite des nombres $U(n)$ (justifier la réponse donnée).

b. Exprimer alors $U(n)$ en fonction de n pour tout entier n compris entre 1 et 15.

2. Calculer la distance parcourue par Aline à la dixième semaine.

3. Quelle formule, recopiable vers la droite, a-t-elle saisie dans la cellule B23 pour calculer la distance moyenne parcourue par chacune au cours des entraînements ?

Partie B: Programme d'entraînement de Blandine

Blandine parcourt 20 km la première semaine. Elle veut augmenter chaque semaine d'un même pourcentage la distance parcourue de telle sorte que la distance parcourue à la quinzième semaine soit, à l'unité près, 118 km. Pour cela elle a testé différents pourcentages écrits dans la cellule C3.

1. Quelle formule a-t-elle saisie dans la cellule C7 puis recopiée vers le bas de C8 à C20, sachant que les résultats se sont actualisés automatiquement lorsqu'elle a modifié le pourcentage d'augmentation hebdomadaire ?

2. Les essais lui ont permis de trouver qu'une augmentation hebdomadaire de 13,5 % convient.

On note $V(n)$ la distance parcourue par Blandine la n-ième semaine.

a. Quelle est la nature de la suite des nombres $V(n)$? (Justifier la réponse donnée.)

b. Exprimer $V(n)$ en fonction de n pour tout entier n compris entre 1 et 15.

c. Quelle distance Blandine parcourt-elle à la dixième semaine ?

3. Calculer le pourcentage d'augmentation de la distance parcourue entre la première et la quinzième semaine.

Partie C: Programme d'entraînement de Caroline

Caroline parcourt 20 km la première semaine, Pour calculer les distances parcourues les semaines suivantes, elle a saisi dans la cellule D7 la formule :

= D6*(1+$D$3)+$D$2

et l'a recopiée vers le bas de D8 à D20.

1. La valeur figurant dans la cellule D7 a été masquée. Quelle est cette valeur ?

2. Quelle est la formule contenue par la cellule D8 ?

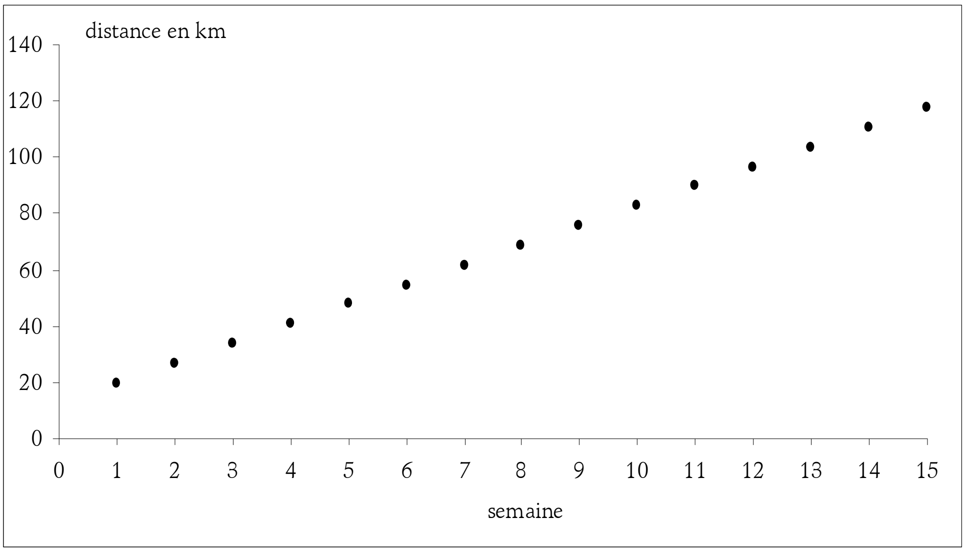
3. On note$W(n)$ la distance parcourue par Caroline la n-ième semaine. La suite des nombres $W(n)$ est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique? Justifier les réponses.

4. Calculer la distance moyenne parcourue par Caroline au cours de ses entraînements.

Annexe

	A	B	C	D
1		Programme d'entraînement d'Aline	Programme d'entraînement de Blandine	Programme d'entraînement de Caroline
2			Pourcentage d'augmentation	4
3			13,50%	5,00%
4		Distance $U(n)$ parcourue par Aline la semaine n (en km)	Distance $V(n)$ parcourue par Blandine la semaine n (en km)	Distance $W(n)$ parcourue par Caroline la semaine n (en km)
5				

6	semaine 1	20	20,000	20,000
7	semaine 2	27	22,700	
8	semaine 3			30,250
9	semaine 4			
10	semaine 5	48	33,190	41,551
11	semaine 6		37,671	47,628
12	semaine 7	62	42,757	54,010
13	semaine 8	69	48,529	60,710
14	semaine 9		55,080	67,746
15	semaine 10			
16	semaine 11			82,889
17	semaine 12	97	80,535	
18	semaine 13			99,586
19	semaine 14	111	103,747	108,565
20	semaine 15	118	117,753	117,993
21				
22	Distance totale parcourue	1035	841,849	957,856
23	Distance moyenne	69	56,123	



Correction

Partie A: Programme d'entraînement d'Aline

1. a. Il semble que l'on ajoute 7 chaque semaine, ce qui est la signature d'une suite arithmétique de premier terme $U(1) = 20$ et de raison $r = 7$. Par ailleurs le graphique montre des points alignés ce qui correspond à une croissance linéaire.

b. On a donc $U(n) = U(1) + (n-1)r = 20 + 7r$.

2. Pour $n = 10$ on a $U(10) = 20 + 7 \times 10 = 90$.

3. On fait le total des cellules B6 à B20 : « =SOMME(B6 :B20) » puis on divise par le nombre de valeurs, ici 15. On peut donc écrire dans B23 : « =SOMME(B6 :B20)/15 ».

Si on recopie cette formule en C23, on aura : « =SOMME(C6 :C20)/15 » ce qui donnera la distance moyenne parcourue par Blandine.

Partie B: Programme d'entraînement de Blandine

1. On prend le contenu de C3 (directement car exprimé en %, il s'agit en fait du nombre 0,1350) et on met « =C6*(1+$C$3) ». Lorsqu'on recopie vers le bas, par exemple en C8 on a : « =C7*(1+$C$3) » ce qui est le calcul cherché.

2. a. Comme on multiplie chaque semaine par le même nombre : $q = 1+0,1350 = 1,1350$, nous sommes en présence d'une suite géométrique de premier terme $V(1) = 20$ et de raison $q = 1,135$

b. $V(n) = V(1) \times q^{n-1} = 20(1,135)^{n-1}$.

c. $V(10) = V(1) \times q^{9} = 20(1,135)^{9} = 62,516$.

3. $\frac{62,516-20}{20} \approx 2,126 = 212,6\ \%$.

Partie C: Programme d'entraînement de Caroline

1. On a D6 = 20, D3 = 5 % = 0,05 et D2 = 4, soit $D7 = 20 \times (1+0,05) + 4 = 25$.

2. Comme on a recopié vers le bas, la seule référence à D6 a changé et est devenue D7 :

« = D7*(1+$D$3)+$D$2 »

3. La suite n'est ni l'une ni l'autre : si elle était arithmétique on aurait D7−D6 = D8−D7, or D6 − D7 = 5 et D8 − D7 = 5,250 ; pour géométrique ce sont les quotients $\frac{\text{D7}}{\text{D6}} = \frac{25}{20} = 1,25$ et $\frac{\text{D8}}{\text{D7}} = \frac{30,25}{25} = 1,21$ qui sont différents.

4. La distance moyenne est de 63,857 km.

Annexe

	A	B	C	D
1		Programme d'entraînement d'Aline	Programme d'entraînement de Blandine	Programme d'entraînement de Caroline
2			Pourcentage d'augmentation	4
3			13,50%	5,00%
4		Distance $U(n)$ parcourue par Aline la semaine n (en km)	Distance $V(n)$ parcourue par Blandine la semaine n (en km)	Distance $W(n)$ parcourue par Caroline la semaine n (en km)
5				
6	semaine 1	20	20,000	20,000
7	semaine 2	27	22,700	25,000
8	semaine 3	34	25,765	30,250
9	semaine 4	41	29,243	35,763
10	semaine 5	48	33,190	41,551
11	semaine 6	55	37,671	47,628

12	semaine 7	62	42,757	54,010
13	semaine 8	69	48,529	60,710
14	semaine 9	76	55,080	67,746
15	semaine 10	83	62,516	75,133
16	semaine 11	90	70,956	82,889
17	semaine 12	97	80,535	91,034
18	semaine 13	104	91,407	99,586
19	semaine 14	111	103,747	108,565
20	semaine 15	118	117,753	117,993
21				
22	Distance totale parcourue	1035	841,849	957,856
23	Distance moyenne	69	56,123	63,857

23. Liban, juin 2004, 12 points

Partie A : Évolution d'une population de bactéries

Dans un laboratoire de microbiologie, on étudie la croissance d'une population de bactéries de la façon suivante : au départ, on injecte dans un milieu nutritif une quantité p_0 de bactéries et on la laisse se développer ; on mesure ensuite toutes les heures son développement en relevant la quantité p_n de bactéries présentes dans le milieu au bout de la n-ième heure (n étant un entier naturel).

En reliant les points de coordonnées $(n,\ p_n)$ relevées dans les colonnes A et B du tableau de l'annexe de l'exercice 2, on obtient ainsi la courbe de croissance de cette population, notée C.

On note p la fonction numérique définie sur l'intervalle [0 ; 10] et représentée par la courbe C.

1. Les microbiologistes définissent le *temps de latence* de la population comme le temps nécessaire pour que la population atteigne la valeur 200.

Déterminer graphiquement ce temps de latence à un quart d'heure près. (La lecture sera justifiée par des tracés en pointillés ; on fera apparaître tous les tracés et toutes les constructions utiles).

2. La population de bactéries prend alors son essor et se multiplie à grande vitesse. Dans la colonne C du tableau, on veut calculer le pourcentage d'augmentation de la population d'une heure à l'autre.

Parmi les trois formules suivantes :

=(B3/B2−1)*100, **= B3/$B$2−1**, **= B3/B2−1**,

donner celle que l'on doit insérer dans la cellule C3 (cellule à l'intersection de la colonne C et de la ligne 3) pour obtenir le premier pourcentage d'augmentation, sachant que cette formule sera recopiée vers le bas et que les cellules de la colonne C sont en format pourcentage.

Compléter alors la colonne C de la ligne 9 à la ligne 12 par les valeurs que donnerait un tableur en arrondissant les résultats affichés à deux chiffres après la virgule.

3. Lorsque la nourriture ne suffit plus à satisfaire l'ensemble de la population, la croissance ralentit. On considère qu'il y a surpopulation dès que le pourcentage d'augmentation de la population est inférieur à 1%.

Au bout de combien de temps peut-on parler de surpopulation ? Justifier la réponse.

Partie B : Comparaison avec unmodèle mathématique

On veut comparer l'évolution de la population des bactéries vue en partie A avec celle d'une population théorique dont l'effectif au bout de la n-ième heure est noté u_n (n étant un entier naturel). On suppose que, pour cette population, $u_0 = 73$ et que l'effectif augmente de 67 % toutes les heures.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 (on arrondira le résultats à l'unité).

2. Donner la nature de la suite (un) puis compléter les cellules vides de la colonne D du tableau de l'annexe de l'exercice 2 (on arrondira les résultats à l'unité).

3. Sur la figure 2 de l'annexe de l'exercice 2, on a relié les points de coordonnées (n ; u_n) et on a tracé sur le même graphique la courbe C de la partie A. Utiliser le graphique et le tableau pour donner :

a. l'intervalle de temps où le modèle théorique considéré sous-évalue la réalité ;

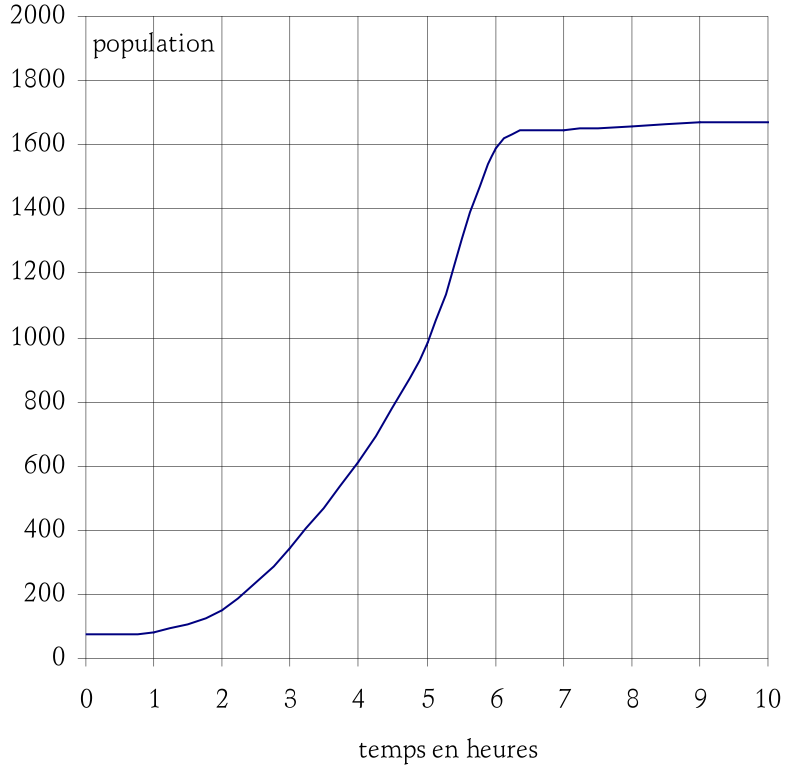
b. l'heure à partir de laquelle le modèle théorique (u_n) s'éloigne avec l'observation (p_n).

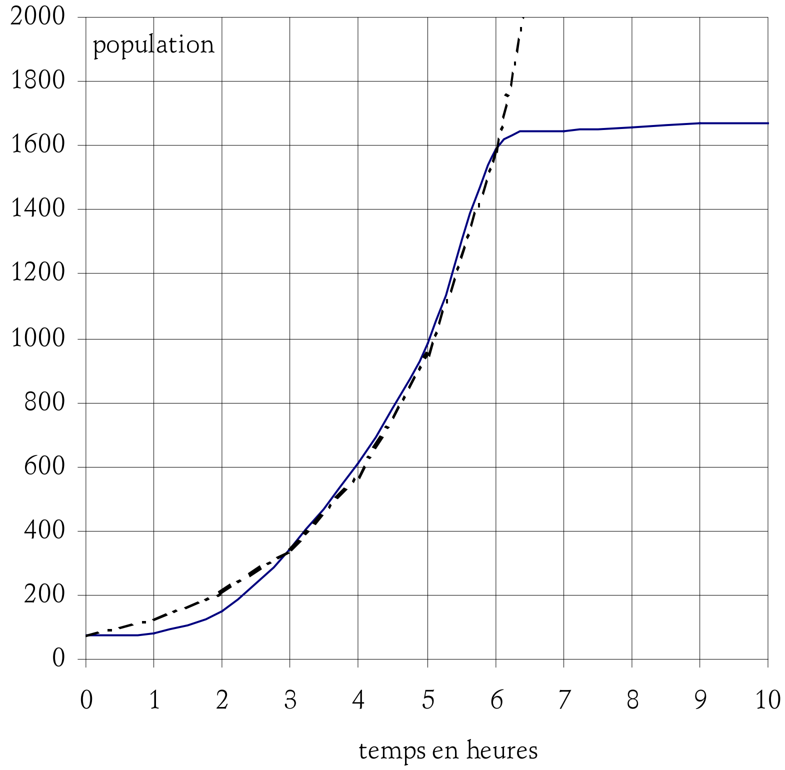
4. a. Exprimer le terme u_n en fonction de n et de u_0.

b. Quelle expression de p_n en fonction de n (valable pour tout entier n inférieur ou égal à 6) peut-on proposer en utilisant le modèle considéré ?

Tableau de l'exercice 2

	A	B	C	D
1	n	Population (p_n)	Pourcentage d'augmentation	Suite (u_n)
2	0	73		73
3	1	82	12,33	
4	2	149	81,71	
5	3	341	128,86	
6	4	612	79,47	568
7	5	982	60,46	948
8	6	1 587	60,61	1584
9	7	1 644		
10	8	1 659		4416
11	9	1 668		7375
12	10	1 670		12317





24. Amérique du Sud, novembre 2004, 12 points

Eté 2003, une canicule exceptionnelle s'installe sur la France.

Monsieur Dupont désire creuser un puits, au fond de son jardin. Une réserve naturelle d'eau souterraine se situe à 9 mètres. Il demande des devis pour le forage.

Devis n° 1 : Forfait de prise en charge, visite sur le terrain : 40 € TTC, prix forfaitaire du mètre foré : 150 € TTC.

Devis n° 2 : Pas de forfait de prise en charge, mais le prix, du mètre est fonction de la profondeur atteinte : le premier mètre coûte 135 € TTC; chaque mètre suivant coûte 3% de plus que le précédent.

Nous allons étudier ces deux devis pour évaluer le coût du forage d'un puits de 9 mètres.

Partie A: étude du devis n° 1

1. On note u_0 le forfait de prise en charge de 40 € et u_n (pour $n \geq 1$) le coût total de ***n* mètres forés**. Ainsi $u_0 = 40$ et $u_1 = 190$. Calculer u_2 et u_3.

2. a. À quel type de croissance correspond la dépense du forage ?

b. Justifier que $u_n = 40+150n$.

3. Calculer alors le coût d'un forage de 9 mètres.

Partie B: étude du devis n° 2

1. On note v_1 le coût du premier mètre foré et v_n le coût du ***n*-ième mètre foré**. Ainsi $v_1 = 135$. Montrer que $v_2 = 139{,}05$.

2. a. À quel type de croissance correspond la dépense du forage ?

b. Justifier que $v_n = 135\times(1,03)^{n-1}$.

3. Calculer alors le coût du 9e mètre du forage (arrondi au centime).

4. Pour calculer le coût total du forage, nous utilisons le tableur ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	coût du n-ième mètre	135	139,05							
4	coût total de n mètres forés	135	274,05							
5										
6										
7										

a. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D3 pour obtenir dans chaque cellule, après une recopie automatique jusqu'en J3, le coût du n-ième mètre foré ?

b. Quelle formule doit-on saisir dans la celluleD4 pour obtenir dans chaque cellule, après une recopie automatique jusqu'en J4, le coût total de n mètres forés ?

c. Compléter ce tableau, donné en annexe. Les montants seront arrondis au centime.

d. Quel est le coût d'un forage de 9 mètres ?

Annexe 1 : coût du forage

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3	coût du n-ième mètre	135	139,05							
4	coût total de n mètres forés	135	274,05							
5										
6										
7										

25. Nouvelle Calédonie, novembre 2004, 10 points

Le tableau suivant donne le nombre d'utilisateurs d'internet dans le monde (en millions) pour les années 1995 à 2000.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'utilisateurs (enmillions)	34	56	92	145	243	414

On souhaite utiliser un tableur pour analyser ces données. On a élaboré le tableau fourni en annexe 1 à rendre avec la copie.

Partie A

1. Expliquer comment il est possible de remplir la colonne A sans avoir à saisir toutes les valeurs contenues dans les cellules.

2. Dans la cellule C3, on a calculé le quotient du nombre d'utilisateurs d'internet en 1996 par le nombre d'utilisateurs d'internet en 1995. Que représente ce quotient ? Quelle est la formule à saisir dans la cellule C3 pour effectuer ce calcul et obtenir par recopie les nombres de la colonne C ?

3. a. Quelle est l'augmentation en pourcentage du nombre d'utilisateurs d'internet entre 1995 et 1996 ? Entre 1996 et 1997 ? (On donnera des pourcentages arrondis à l'unité.)

b. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D3 pour obtenir, par recopie vers le bas, les pourcentages de variation du nombre d'utilisateurs d'internet au fil des années ?

c. Compléter la colonne D du tableau de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

d. La croissance du nombre d'utilisateurs d'internet entre 1995 et 2000 est elle exponentielle ? Justifier la réponse.

Partie B

1. Pour étudier la croissance du nombre d'utilisateurs d'internet dans le monde, on choisit de la modéliser par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 34$. II s'agit de trouver une valeur de la raison de cette suite géométrique, qui permette cette modélisation. Cette valeur sera saisie dans la cellule I1.

Quelle formule doit-on saisir dans la cellule F3 pour calculer u_1, en utilisant le contenu de la cellule I1, de façon à obtenir, par recopie vers le bas, les termes u_2, u_3, u_4 et u_5 ?

Les valeurs peuvent être ainsi réactualisées automatiquement si on change le nombre contenu dans la cellule I1.

Dans la suite de l'exercice, on prendra 1,645 pour valeur de la raison de la suite (u_n).

2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5, puis compléter la colonne F du tableau de l'annexe 1 à rendre avec la copie (on donnera les résultats arrondis à l'unité).

3. En admettant que, jusqu'en 2004, ce modèle reste fiable, donner une estimation du nombre d'utilisateurs d'internet dans le monde en 2004.

Annexe à rendre avec la copie

Annexe I

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	Nombre d'utilisateurs	Quotient	Pourcentage d'augmentation	n	u_n		Raison:	
2	1995	34			0	34			
3	1996	56	1,647 1		1				
4	1997	92	1,642 9		2				
5	1998	145	1,576 1		3				
6	1999	243	1,675 9		4				
7	2000	414	1,703 7		5				

26. France, septembre 2004, 12 points

Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 1.

Partie 1

Pour stocker des fichiers photos dans un appareil numérique ou sur un disque dur d'ordinateur, on utilise des algorithmes de compression : un fichier compressé prend moins de place en mémoire, mais sa qualité est également moins bonne.

Le tableau ci-dessous donne la taille (en milliers d'octets ou Ko) d'un fichier en fonction du niveau de compression pour les 5 premiers niveaux. La taille initiale du fichier est 689 Ko et correspond au niveau de compression 0.

niveau de compression	0	1	2	3	4	5
taille du fichier(Ko)	689	542	427	335	263	206

1. De quel pourcentage la taille du fichier a-t-elle diminué après une compression de niveau 1 ? Donner le résultat arrondi à 0,1%.

On constate que, pour chaque niveau de compression, la taille du fichier est multipliée par un coefficient voisin de 0,786. On peut donc approcher la taille du fichier après une compression de niveau n par le nombre T vérifiant la relation : $T_{n+1} = 0{,}786T_n$ avec $T_0 = 689$.

2. Quelle est la nature de la suite des nombres T_n ?

3. Calculer les valeurs exactes de T_1, T_2 et les comparer aux tailles réelles.

4. Exprimer T_n en fonction de n. En déduire une valeur approchée entière de T_{10}.

5. À l'aide de la calculatrice, déterminer le niveau minimal de compression qu'il faudrait utiliser pour que la taille du fichier compressé soit inférieure à 40 Ko.

Partie 2

Pour le tirage papier de photographies numériques, trois agences proposent les tarifs suivants :

- **Agence B** : les 50 premières photos sont à 0,53 € pièce, les 50 suivantes sont à 0,45 € pièce et les suivantes à 0,38 € pièce.
- **Agence C** : pour un tirage de 1 à 39 photos : toutes les photos sont à 0,35 € pièce ;

pour un tirage de 40 à 59 photos : toutes les photos sont à 0,33 € pièce ;

pour un tirage de 60 à 99 photos : toutes les photos sont à 0,31 € pièce ;

pour un tirage de 100 photos et plus toutes les photos sont à 0,25 € pièce.

- **Agence D** : 2,90 € forfaitaire plus 0,25 € par photo.

1. Calculer le prix du tirage de 60 photos dans chacune des agences.

2. Pour calculer le prix de revient des tirages dans les différentes agences, on a utilisé un tableur. On a reproduit dans l'annexe 1 une partie d'écran.

On veut que les formules entrées puissent être recopiées vers le bas et s'actualisent automatiquement si on change les valeurs des lignes 3 à 6.

a. Quelle formule écrit-on dans la cellule C9 ? Jusqu'où peut-on la recopier ?

b. Quelle nouvelle formule écrit-on dans la cellule C48 ?

c. Quelle formule à recopier jusqu'en B58 faut-il écrire en B9 ?

d. On recopie cette formule jusqu'à la cellule B58 : qu'est-elle devenue en B50 ?

e. Quelle nouvelle formule faut-il écrire dans la cellule B59 ?

Partie 3

Le graphique donné en annexe 2 représente le prix du tirage pour les trois agences. Avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la courbe associée à chaque agence.

2. Déterminer le prix, dans chacune des agences, du tirage de 80 photos.

3. Déterminer, pour chaque agence, combien de photos on peut obtenir pour 30 **€**.

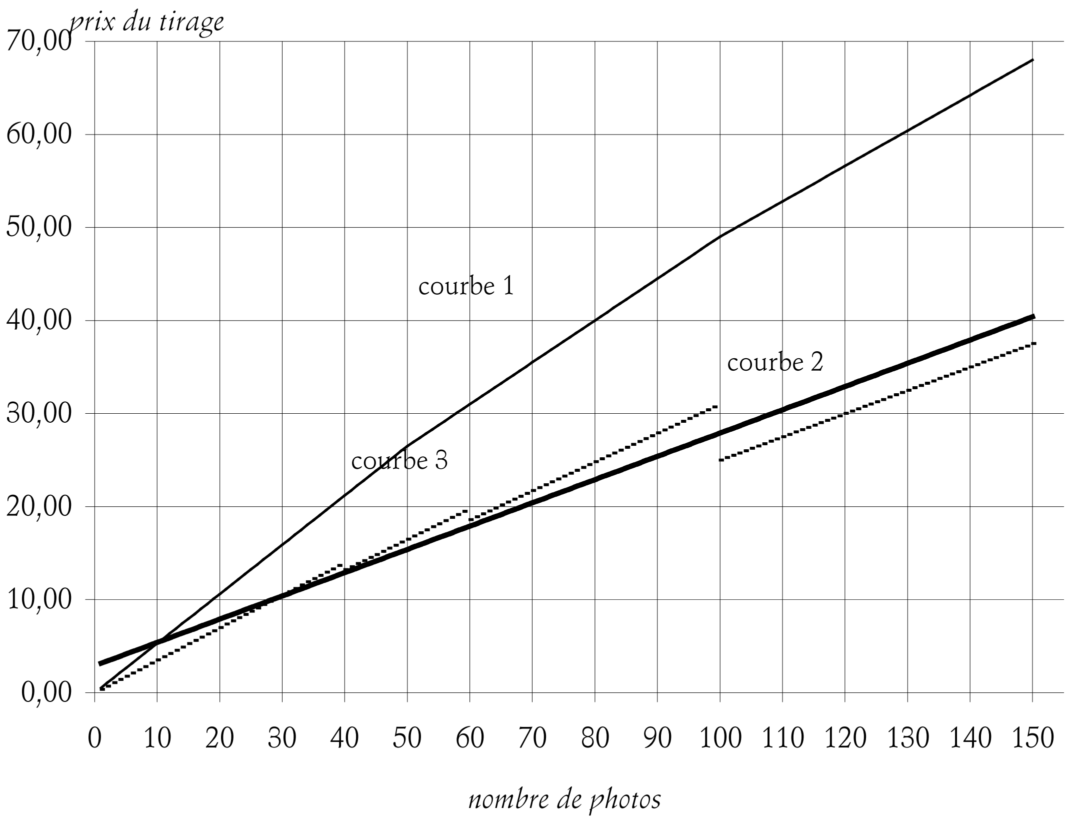
Annexe

Partie 2

	A	B	C	D
1				
2		Agence B	Agence C	Agence D
3		0,53	0,35	2,9
4		0,45	0,33	0,25
5		0,38	0,31	
6			0,25	
7				
8	Nombre de photos	Prix avec l'agence B	Prix avec l'agence C	Prix avec l'agence D
9	1	0,53	0,35	3,15
10	2	1,06	0,70	3,40
11	3	1,59	1,05	3,65
…	…	…	…	…
47	39	20,67	13,65	12,65
48	40	21,20	13,20	12,90
49	41	21,73	13,53	13,15
50	42	22,26	13,86	13,40
51	43	22,79	14,19	13,65
52	44	23,32	14,52	13,90
53	45	23,85	14,85	14,15
54	46	24,38	15,18	14,40
55	47	24,91	15,51	14,65
56	48	25,44	15,84	14,90

57	49	25,97	16,17	15,15
58	50	26,50	16,50	15,40
59	51	26,95	16,83	15,65
60	52	27,40	17,16	15,90
61	53	27,85	17,49	16,15
62	54	28,30	17,82	16,40
63	55	28,75	18,15	16,65

Partie 3



27. Pondicherry, avril 2005, 12 points

Pour tous les calculs de cet exercice, on arrondira au centime d'euro.

Pierre, nouveau diplômé, a deux propositions d'embauche dans deux entreprises différentes. Avant d'accepter une des deux propositions, il effectue une étude sur les salaires proposés par chacune des entreprises.

Partie 1

I. L'entreprise Boss lui propose pour un emploi commençant le 1er janvier 2005, le contrat suivant : le salaire mensuel initial est de 1180 € et augmente chaque 1er janvier de 12 €.

On note u_0 ce salaire initial, u_1 le salaire au 1er janvier 2006, u_2 le salaire au 1er janvier 2007, u_n le salaire au 1er janvier de l'année 2005+n.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier votre réponse.

3. a. Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

b. Quel serait son salaire mensuel en 2010 ?

II. L'entreprise Rapido lui propose, pour le même emploi commençant le 1er janvier 2005, le contrat de travail suivant : le salaire mensuel initial est de 1027,50 **€** et augmente chaque 1er janvier de 3,5%.

On note v_0 ce salaire initial, v_1 le salaire au 1er janvier 2006, v_2 le salaire au 1er janvier 2007, v_n le salaire au 1er janvier de l'année $2005+n$.

1. Calculer v_1 et v_2.

2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier votre réponse.

3. a. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

b. Quel serait son salaire mensuel en 2010 ?

<u>Partie 2</u>

Avant d'effectuer son choix pour l'une ou l'autre des entreprises, Pierre veut comparer les montants successifs des salaires proposés. Pour cela, il réalise un tableau à l'aide d'un tableur (tableau 1, annexe 1).

1. Expliquer comment Pierre a pu remplir la colonne A (cellules allant de A2 à A14) sans avoir à taper toutes les valeurs contenues dans ces cellules.

2. Quelles formules doit-t-il écrire en cellules B2 et B3 pour obtenir, en la recopiant vers le bas, les termes de la suite (u_n) dans la colonne B ?

3. Quelles formules doit-t-il écrire en cellules E2 et E3 pour obtenir, en la recopiant vers le bas, les termes de la suite (v_n) dans la colonne E ?

4. Le tableau 2 consigne les résultats obtenus. Compléter toutes les cellules laissées vides de ce tableau de l'annexe 1 à rendre avec la copie.

<u>Partie 3</u>

1. Comparer l'évolution des salaires mensuels dans chaque entreprise.

2. a. En quelle année, pour la première fois, le cumul des salaires de l'entreprise Rapido dépassera-t-il le cumul des salaires de l'entreprise Boss ?

b. Comparer avec les résultats obtenus dans la question 1. (partie 3) et commenter.

Annexe 1

Tableau 1 concernant les salaires mensuels et le cumul des salaires en euros dans l'entreprise Boss et dans l'entreprise Rapido

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	Salaire mensuel avec Boss	Salaire annuel avec Boss	Cumul des salaires avec Boss	Salaire mensuel avec Rapido	Salaire annuel avec Rapido	Cumul des salaires avec Rapido
2	2005						
3	2006						
4	2007						
5	2008						
6	2009						
7	2010						
8	2011						
9	2012						
10	2013						

11	2014						
12	2015						
13	2016						
14	2017						

Tableau 2 concernant les salaires mensuels et le cumul des salaires en euros **dans l'entreprise Boss et dans l'entreprise Rapido**

	A	B	C	D	E	F	G
1	année	Salaire mensuel avec Boss	Salaire annuel avec Boss	Cumul des salaires avec Boss	Salaire mensuel avec Rapido	Salaire annuel avec Rapido	Cumul des salaires avec Rapido
2	2005	1 180,00	14 160,00	14 160,00	1 027,50	12 330,00	12 330,00
3	2006	1 192,00	14 304,00	28 464,00		12 761,55	25 091,55
4	2007	1 204,00	14 448,00		1 100,68	13 208,20	38 299,75
5	2008	1 216,00	14 592,00	57 504,00	1 139,21	13 670,49	51 970,25
6	2009	1 228,00	14 736,00	72 240,00	1 179,08	14 148,96	66 119,20
7	2010		14 880,00	87 120,00		14 644,17	80 763,38
8	2011	1 252,00	15 024,00	102 144,00	1 263,06	15 156,72	95 920,09
9	2012	1 264,00	15 168,00	117 312,00	1 307,27	15 687,20	111 607,30
10	2013	1 276	15 312,00	132 624,00	1 353,02	16 236,26	127 843,55
11	2014	1 288 ,00	15 456,00	148 080,00	1 400,38	16 804,52	144 648,08
12	2015	1 300,00	15 600,00		1 449,39	17 392,68	162 040,76
13	2016	1 312,00	15 744,00		1 500,12	18 001,43	180 042,19
14	2017	1 324,00	15 888,00	195 312,00	1 552,62	18 631,48	198 673,66

28. Amérique du Nord, juin 2005, 8 points

Dans le cadre de leurs T.P.E. (Travaux Personnels Encadrés), deux lycéens de première souhaitent étudier l'évolution de la population de grenouilles de l'étang de leur commune. Selon le club des écologistes de cette commune, cette population serait en voie de disparition et les membres du club s'en inquiètent. Pour effectuer leur étude, les deux lycéens ne disposent d'abord que des deux relevés suivants qui ont été effectués par le club :

Date du relevé	1er novembre 2002	1er novembre 2003
Population de grenouilles	1000	950
Rang n de l'année	0	1

Pour pratiquer des prévisions, les deux lycéens modélisent l'évolution de la population de grenouilles à l'aide d'une suite.

Partie A

Les deux lycéens font l'hypothèse qu'une suite arithmétique permet de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. Ils notent cette suite (u_n) où u_0 est la population de grenouilles le 1er novembre 2002 et plus généralement, u_n est la population de grenouilles le 1er novembre $(2002+n)$.

1. Calculer la raison r de la suite (u_n).

2. Selon ce modèle, quelle serait la population de grenouilles le 1er novembre 2005 ? Le 1er novembre 2012 ? Le 1er novembre ($2002+n$) ?

3. Déterminer l'année où la population de grenouilles aura totalement disparu selon ce modèle.

4. Les deux lycéens reçoivent le relevé effectué le 1er novembre 2004 : 903 grenouilles. Est-ce que ce nouveau résultat confirme leur hypothèse ?

Partie B

Poursuivant leur réflexion, les deux lycéens se demandent si une suite géométrique (v_n) permettrait de modéliser l'évolution de la population de grenouilles. v_0 serait alors la population de grenouilles le 1er novembre 2002 et plus généralement, v_n la population de grenouilles le 1er novembre ($2002+n$).

1. a. Vérifier que la suite (v_n) a pour raison 0,95.

b. Expliquer pourquoi ce nouveau modèle semble mieux adapté.

2. a. Quelle serait alors, à l'entier près, la population de grenouilles le 1er novembre 2005 ?

b. Pour tout entier naturel n, écrire v_n en fonction de n.

c. En déduire, à l'entier près, quelle serait la population de grenouilles le 1er novembre 2012 ?

3. Les deux lycéens se demandent aussi à partir de quelle date la population de grenouilles de l'étang serait réduite à moins de deux grenouilles. Répondre à cette question en s'aidant de la calculatrice et en donnant les résultats qui permettent de conclure.

29. Centres étrangers, juin 2005, 12 points

Le but de l'exercice est de comparer les tarifs mensuels de location de deux appartements de même type, nommés X et Y, dans deux villes de France.

Partie I

Étude du tarif de location de l'appartement X

On note u_n le tarif mensuel de location, en euro, de l'appartement X en $1990+n$. Ainsi u_0 est le tarif mensuel de location de l'appartement X en 1990. On définit ainsi la suite (u_n) des tarifs mensuels de location, en euro de l'appartement X :

Le premiers termes de cette suite sont donnés dans le tableau suivant :

Rang de l'année n	0	1	2	3	4	5	6
Tarif mensuel u_n	413	425	437	449	461	473	485

1. Représenter grapIhiquement les sept premiers termes de la suite (u_n).

2. Conjecturer la nature de la suite (u_n) en explicitant Ia démarche suivie.

3. On admet que la suite (u_n) satisfait la conjecture précédente.

a. Exprimer u_n, en fonction de n.

b. Calculer le tarif mensuel de location, en euro, de l'appartement X en 2006.

Dans les parties II et III les résultats seront arrondis au dixième.

Partie II : Étude du tarif de location de l'appartement Y

On note v_n, le tarif mensuel de location, en euro, de l'appartement Y en $1990+n$.

En 1990, le tarif mensuel de location est de 400 euros et chaque année il est augmenté de 2,7%.

1. Calculer le tarif mensuel de location, en euro, de l'appartement Y en 1991, puis en 1992.

2. Exprimer v_{n+1}, en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n) et préciser sa raison. Exprimer v_n, en fonction de n.

3. Calculer le tarif mensuel de location, en euros, de l'appartement Y en 2006.

<u>Partie III :</u> Comparaison des deux tarifs de location des appartements X **et** Y

À l'aide d'un tableur, on veut comparer ces deux tarifs. Pour cela on utilise la feuille de calcul donnée en annexe. Cette feuille sera complétée et remise avec la copie**.** Dans cette feuille de calcul, la cellule située, par exemple, à l'intersection de la colonne B et de la ligne 5 est notée B5.

1. Dans quelle cellule le tableur affiche-t-il le tarif mensuel de location en euro, de l'appartement X en 1996 ?

2. Quelle formuIe, recopiable vers le bas, faut-il mettre en B3 ? Que devient cette formule en B7 ?

3. Quelle formuIe recopiable vers le bas, faut-il mettre , en C3 ?

4. À l'aide de la calculatrice, compléter les colonnes B et C sur l'annexe.

5. En quelle année le taux mensuel de location de l'appartement X devient-il plus avantageux que celui de l'appartement Y ?

6. Lorsque l'on écrit dans la cellule D2 la formule **SI(B2 <500 ; " loyer modéré " ; " loyer élevé ")** on voit s'afficher dans cette cellule D2 :

« loyer modéré » si la condition B2 < 500 est vérifiée,

« loyer élevé » si la condition B2 < 500 n'est pas vérifiée.

Donner une formule, recopiable vers le bas affichant en D2 le nom de l'appartement (X ou Y) au tarif le plus avantageux. Comment retrouve-t-on ainsi le résultat de la question 5 ?

Annexe

À rendre avec la copie

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	
2	0	413	400	
3	1	425		
4	2	437		
5	3	449		
6	4	461	445	
7	5	473	457	
8	6	485	469,3	
9	7			
10	8			
11	9			
12	10	533	522,1	
13	11	545	536,2	
14	12	557	550,7	
15	13	569	565,6	
16	14			
17	15			
18	16			

30. Liban, juin 2005, 12 points

Dans un pays imaginaire noté I, il y a une capitale P et un ensemble de villages V.

Au 1er janvier 2002, P et V comptaient respectivement 200 000 et 300 000 habitants.

Chaque année, la population de P augmente de 10 %, alors que celle de V diminue de 20 000 habitants.

1. a. Au 1er janvier 2002 , quel pourcentage représente la population de$P$ par rapport à celle de I ?

b. Calculer la population de P, celle de V puis celle de I au 1er janvier 2003. Quel pourcentage représente alors la population de P par rapport à celle de I ?

2. Soit n un entier naturel.On note p_n la population de$P$ au 1er janvier (2002+n), ainsi $p_0 = 200\,000$.

a. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire la nature de la suite (p_n).

b. Exprimer p_n en fonction de n. Calculer p_5. Que représente cette valeur ?

3. Soit n un entier naturel. On note v_n la population de V au 1er janvier (2002+n), ainsi $v_0 = 300\,000$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la nature de la suite (v_n).

b. Exprimer v_n en fonction de n. Calculer v_5. Que représente cette valeur ?

4. Cette question fait intervenir le tableau donné en annexe, à rendre avec la copie.

Un tableur donne dans la colonne A les années de 2002 à 2007, dans la colonne B la population de la capitale P , dans la colonne C la population de l'ensemble des villages V et dans la colonne D la population totale du pays I au 1er janvier de l'année correspondante.

a. Indiquer les formules qu'il faudrait écrire dans les cellules D2, A3, B3 et C3 afin d'obtenir automatiquement, en recopiant vers le bas, les années dans la colonne A et les populations dans les colonnes B, C et D.

b. Remplir le tableau fourni en annexe et rendre celle-ci avec la copie.

5. a. Représenter graphiquement l'évolution de la population de P et celle de V en plaçant les points de coordonnées $(n\ ;\ p_n)$ et $(n\ ;\ v_n)$ lorsque l'entier n varie de 0 à 5. On prendra comme unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 000 habitants sur l'axe des ordonnées qui sera gradué à partir de 200 000 habitants.

b. Donner l'année x au cours de laquelle la population de P dépassera celle de V.

c. En supposant linéaire l'évolution des populations de P et de V au cours de l'année x déterminer graphiquement le trimestre au cours duquel la population de P dépassera celle de V, en faisant apparaître tous les tracés utiles.

Annexe : à rendre avec la copie

	A	B	C	D
1	Année	Population de P au 1er janvier	Population de V au 1er janvier	Population de I au 1er janvier
2	2002	200 000	300 000	
3				
4				
5				
6				
7				

Les lignes sont repérées par des numéros 1, 2, 3,... et les colonnes par des lettres A, B, C.

Ainsi, par exemple, la référence B3 repère la cellule se trouvant à l'intersection de la colonne B et de la ligne 3.