Suites Cours

1. Quelques exemples sous forme d'exercices

Exercice 1

On donne, dans le tableau suivant, le nombre d'inscrits sur la liste électorale d'une petite commune pour les années de 1990 à 2000.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'inscrits	1323	1313	1304	1297	1288	1289	1281	1271	1258	1248	1243

1. On note P_n le nombre d'inscrits sur la liste électorale pour l'année n. Donner les valeurs de P_{1992} et P_{1998}.

2. Calculer $P_{1994} - P_{1993}$. Que représente ce nombre ? Calculer $P_{1995} - P_{1994}$. Que représente ce nombre ?

3. Peut-on dire que la suite des nombres P_n est une suite décroissante lorsque n varie de 1990 à 2000 ?

4. Représenter graphiquement la suite (P_n).

Exercice 2

On définit une suite (u_n) par : $u_n = 17\,243 - 8n$ pour tout entier n. On a par exemple, en remplaçant n par 10 : $u_{10} = 17\,243 - 8 \times 10 = 17\,163$.

1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_{1990} ; u_{1991} ; u_{1992}.

2. Calculer $u_1 - u_0$; $u_{1991} - u_{1990}$; $u_{1992} - u_{1991}$.

3. En remplaçant n par $n+1$ dans l'expression de u_n montrer que pour tout entier n : $u_{n+1} = 17\,235 - 8n$.
En déduire que, pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = -8$.

4. En utilisant la relation $u_{n+1} - u_n = -8$, c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n - 8$, compléter le tableau suivant.
La suite (u_n) est-elle une suite décroissante ?

n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
u_n	1 323										

5. Représenter graphiquement la suite (u_n) lorsque n varie de 1990 à 2000.

Remarques

La suite (u_n) de l'exercice 2 prend à peu près les mêmes valeurs que la suite (P_n) de l'exercice 1.

On peut dire que la suite (u_n) est un modèle mathématique de la suite (P_n).

Tous les points représentant la suite (u_n) sont alignés. En effet l'accroissement lorsque l'on passe d'un terme au terme suivant est toujours le même, il est égal à -8. On dit que cet accroissement est constant.

Les différents termes d'une suite de nombres, se notent souvent sous la forme u_n ou $u(n)$. Le nombre n qui s'appelle l'indice est un nombre entier naturel.

On peut définir une suite de nombres $u(n)$ de différentes façons :

- *par la donnée explicite de ses termes, un tableau par exemple (voir exercice 1).*
- *par l'expression de $u(n)$ en fonction de n (voir exercice 2).*
- *par la donnée d'un terme et d'une **relation de récurrence**, c'est-à-dire une relation donnant le terme d'indice $n+1$ en fonction du terme d'indice n (voir exercice 2, question 4).*

2. Suites arithmétiques

Définitions

On dit qu'une suite $u(n)$ est **croissante** si pour tout entier n on a : $u(n+1) > u(n)$.

On dit qu'une suite $u(n)$ est **décroissante** si pour tout entier n on a : $u(n+1) < u(n)$.

On dit qu'une suite est **arithmétique** si l'accroissement lorsqu'on passe d'un terme au terme suivant est un **accroissement constant**. Cet accroissement est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Une suite est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n : $u(n+1) = u(n) + r$.

On dit qu'une qu'une **suite arithmétique** est une **suite à croissance linéaire**.

Exemple

La suite (u_n) de l'exercice 2 est une suite arithmétique de raison -8. En effet on a montré que pour tout entier n on a $u_{n+1} = u_n - 8$.

Propriété

Lorsqu'une suite est arithmétique sa représentation graphique est constitué de points alignés.
Lorsque la représentation graphique d'une suite est constituée de points alignés, cette suite est arithmétique.

Exercice 3

On considère $u(n)$ une suite arithmétique de raison r.

1. Justifier que $u(3) = u(2) + r$ et que $u(4) = u(3) + r$. En déduire que $u(4) = u(2) + 2r$.

2. Montrer que $u(8) = u(5) + 3r$.

3. Quelle relation peut-on écrire entre $u(7)$, $u(2)$ et r ? Justifier.

4. On suppose dans cette question que $u(0) = 4$ et $r = 2$.

Calculer $u(5)$. Donner sans démonstration la valeur de $u(100)$.

Propriété

Soit $u(n)$ une suite arithmétique de raison r.

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, on a $u(n) = u(p) + (n - p)r$.

Exercice 4

Le 01/01/2000 un journal compte 12 000 abonnés. Le service des abonnements a noté que, chaque mois, 1 000 abonnements arrivent à échéance. Sur ces 1 000 abonnements, 750 sont renouvelés. De plus chaque mois 320 nouveaux abonnements sont souscrits.

1. On note u(1) le nombre d'abonnés à la date du 01/01/2000. Quelle est la valeur de u(1) ?

2. On note u(2) le nombre d'abonnés à la date du 01/02/2000. Quelle est la valeur de u(2) ?

3. On note u(3), u(4), …, u(12) le nombre d'abonnés aux dates respectives du 01/03/2000, 01/04/2000, …, 01/12/2000.

a. Montrer que la suite u(n) est une suite arithmétique et donner sa raison.

b. Calculer u(12).

c. En supposant que les conditions restent identiques, déterminer le nombre d'abonnés au journal à la date du 01/12/2002.

3. Suites géométriques

Exercice 5

Un capital de 12 618 euros est placé le 01/01/2000 avec un taux d'intérêt annuel de 6,3%. Tous les ans les intérêts sont cumulés au capital.

On note C(0) le capital correspondant au 1er janvier de l'année 2000. On a donc C(0) = 12 618.

On note, pour tout entier n, C(n) le capital correspondant au 1er janvier de l'année 2000 + n.

1. Calculer C(1), C(2), C(3) (on arrondira les résultats au centime d'euro près).
2. Démontrer que pour tout entier n on a C(n+1) = C(n) x 1,063.
3. Compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats au centime d'euro près).

Rang n de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capital C(n)	12 618										

4. Représenter graphiquement la suite C(n).

Remarque

On observe graphiquement que la suite C(n) est une suite croissante. On pourrait le démontrer en comparant C(n) et C(n+1).

Les points représentant la suite C(n) ne sont pas alignés. La suite n'est pas une suite arithmétique.

Définition

Une suite est **géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n : $u(n+1) = u(n) \times q$.

Le nombre q est appelé la **raison** de la suite géométrique.

Une suite géométrique est une suite ayant un **accroissement relatif constant** ; cela revient à dire que le rapport $\frac{u(n+1)}{u(n)}$ est constant.

On dit qu'une qu'une **suite géométrique** est une **suite à croissance exponentielle**.

Exemple

La suite C(n) de l'exercice 4 est une suite géométrique de raison 1,063 . En effet on a montré que pour tout entier n on a : C(n+1) = C(n) x 1,063.

Exercice 6

On considère $v(n)$ une suite géométrique de raison q.

1. Justifier que $v(3) = v(2) \times q$ et que $v(4) = v(3) \times q$. En déduire que $v(4) = v(2) \times q^2$.
2. Montrer que $v(8) = v(5) \times q^3$.
3. Quelle relation peut-on écrire entre $v(7)$, $v(2)$ et q ? Justifier.
4. On suppose dans cette question que $v(0) = 3$ et $q = 2$.

Calculer $v(5)$. Donner sans démonstration la valeur de $v(100)$.

Propriété

Soit $u(n)$ une suite géométrique de raison q.

Pour tout entier naturel n et tout entier naturel p, on a $u(n) = u(p) \times q^{(n-p)}$.

Exercice 7

Un village avait 3123 habitants en 1995. Le nombre d'habitants diminue de 12 % tous les ans. On note P(n) le nombre d'habitants du village pour l'année n.

1. Donner les valeurs de P(1995) et P(1996) (on arrondira à l'entier le plus proche).

2. Justifier que la suite P(n) est une suite géométrique et donner sa raison.

3. Calculer P(2001) (on arrondira à l'entier le plus proche).

4. En quelle année le nombre d'habitants aura-t-il diminué des deux tiers par rapport à 1995 ?

5. Représenter graphiquement la suite P(n) pour n variant de 1995 à 2005.

Exercice 8

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(n)											
Δ (n)											
S(n)											

1. On considère la suite de nombres u(0) = 1, u(1) = 2, u(2) = 4, u(3) = 8, u(4) = 15, u(5) = 23, u(6) = 32, u(7) = 44, u(8) = 58, u(9) = 73, u(10) = 91.

Recopier et compléter le tableau ci-dessus où :

* la suite Δ (n) est la suite des <u>différences premières</u> Δ (n) = u(n+1) − u(n) ;

on a par exemple Δ (0) = u(1) − u(0) = 2 − 1 = 1 et Δ (1) = u(2) − u(1) = 4 − 2 = 2.

* la suite S(n) est la suite des différences secondes S(n) = Δ (n+1) − Δ (n) ;

on a par exemple S(0) = Δ (1) − Δ (0) = 2 − 1 = 1.

Justifier que la suite u(n) est croissante et que cette croissance est en augmentation.

2. On considère la suite u(n), arithmétique de premier terme 2 et de raison 3. Refaire le même tableau que ci-dessus. Que peut-on dire du sens de variation de la suite u(n) ?

3. On considère la suite u(n), géométrique de premier terme 1 et de raison 2. Refaire le même tableau que ci-dessus. Que peut-on dire du sens de variation de la suite u(n) ?

Exercice 9 : Etude de rentabilité

Une entreprise vend 500 jouets la première année et prévoit une progression annuelle de ses ventes de 12 %.

1. Déterminer la nature de la suite constituée par les productions annuelles successives en précisant son premier terme U_1 et sa raison q.

2. Calculer U_6.

3. Calculer la somme des cinq premiers termes de la suite.

4. L'année où la production totale (depuis le début) atteint 4 000 jouets on renouvelle le parc de machines. En quelle année faudra-t-il prévoir ce renouvellement ?

4. Solutions des exercices

Exercice 1 Solution

1. P_{1992} représente le nombre d'inscrits sur la liste électorale pour l'année 1992. On a $P_{1992} = 1304$.

P_{1998} représente le nombre d'inscrits sur la liste électorale pour l'année 1998. On a $P_{1998} = 1258$.

2. $P_{1994} - P_{1993} = 1288 - 1297 = -9$.

-9 représente la variation du nombre d'inscrits entre 1993 et 1994.

Le nombre d'inscrits entre 1993 et 1994 a diminué de 9 unités.

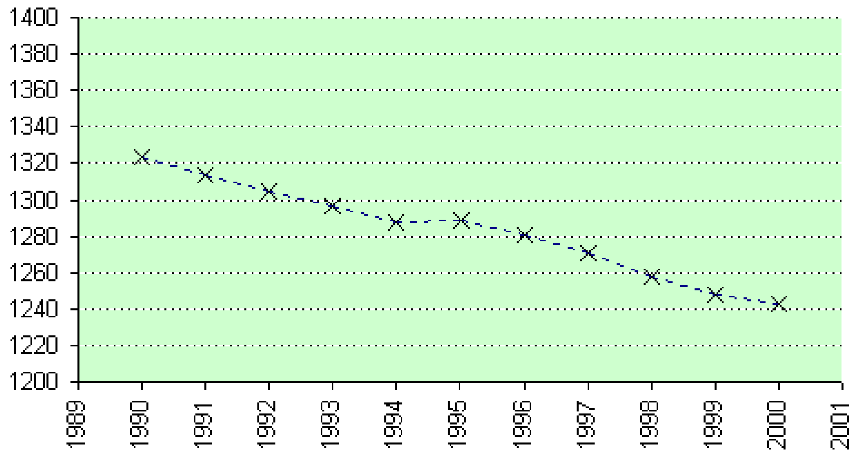
$P_{1995} - P_{1994} = 1289 - 1288 = 1$.

1 représente la variation du nombre d'inscrits entre 1994 et 1995.

Le nombre d'inscrits entre 1994 et 1995 a augmenté de 1 unité.

3. On a vu que le nombre d'inscrits entre 1994 et 1995 a augmenté de 1 unité. La suite des nombres P_n n'est donc pas une suite décroissante lorsque n varie de 1990 à 2000.

4. La représentation graphique de la suite de nombres P_n est constituée des points marqués par une croix. Le tracé en pointillé qui rejoint ces points n'a été fait que pour mieux visualiser l'évolution, il ne fait pas partie de cette représentation graphique et pourrait ne pas être tracé.



Exercice 2 Solution

1. On sait que pour tout entier n on a : $u_n = 17243 - 8n$.

En remplaçant n par 0, on obtient $u_0 = 17243 - 8 \times 0 = 17243$

En remplaçant n par 1, on obtient $u_1 = 17243 - 8 \times 1 = 17235$

En remplaçant n par 1990, on obtient $u_{1990} = 17243 - 8 \times 1990 = 1323$

En remplaçant n par 1991, on obtient $u_{1991} = 17243 - 8 \times 1991 = 1315$

En remplaçant n par 1992, on obtient $u_{1992} = 17243 - 8 \times 1992 = 1307$

2. $u_1 - u_0 = 17235 - 17243 = -8$; $u_{1991} - u_{1990} = 1315 - 1323 = -8$; $u_{1992} - u_{1991} = 1307 - 1315 = -8$.

3. On sait que $u_n = 17\,243 - 8n$. Cette égalité étant vraie pour tous les entiers, on peut l'utiliser pour l'entier $n + 1$. On obtient alors $u_{n+1} = 17243 - 8(n + 1) = 17243 - 8n - 8 = 17235 - 8n$.

On peut alors écrire pour tout entier n :

$u_{n+1} - u_n = 17243 - 8(n+1) - (17243 - 8n) = 17235 - 8n - 17243 + 8n = -8$ donc $u_{n+1} - u_n = -8$.

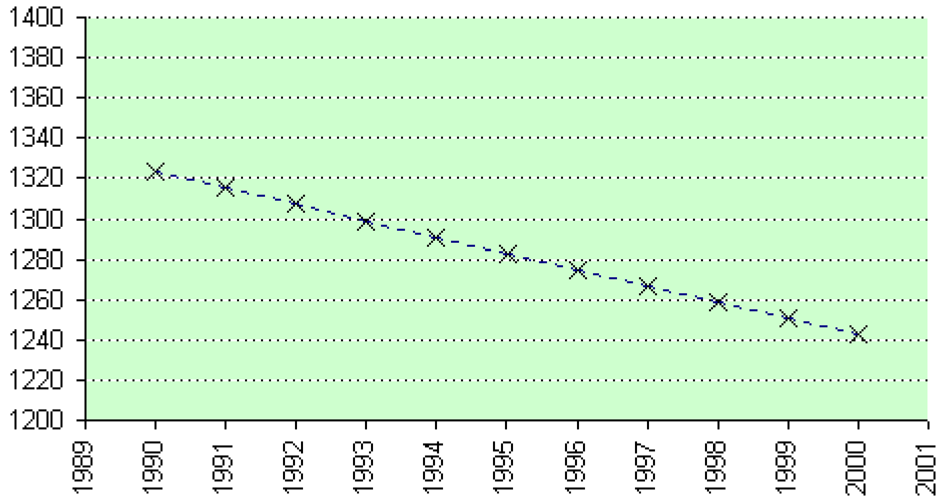
4. Sachant que l'on a $u_{n+1} - u_n = -8$, On peut en déduire que $u_{n+1} = u_n - 8$.

On passe donc d'un terme de la suite au terme suivant en soustrayant 8.

La suite (u_n) est donc décroissante et on obtient le tableau :

n	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
u_n	1323	1315	1307	1299	1291	1283	1275	1267	1259	1251	1243

5. On obtient la représentation graphique suivante :



Exercice 3 Solution

1. u(n) étant une suite arithmétique de raison r, on sait que pour tout entier n on a : u(n+1) = u(n) + r. En prenant n = 2, on obtient u(3) = u(2) + r ; en prenant n = 3, on obtient u(4) = u(3) + r ; on peut donc en déduire que u(4) = u(3) + r = u(2) + r + r donc u(4) = u(2) + 2r.

2. En utilisant la relation u(n+1) = u(n) + r successivement avec n = 7, n = 6 et n = 5, on obtient u(8) = u(7) + r ; u(7) = u(6) + r ; u(6) = u(5) + r. On en déduit u(8) = u(7) + r = u(6) + 2r = u(5) + 3r.

3. On peut écrire u(7) = u(2) + 5r.

En effet, comme précédemment on a : u(7) = u(6) + r = u(5) + 2r = u(4) + 3r = u(3) + 4r = u(2) + 5r.

4. On suppose dans cette question que u(0) = 4 et r = 2.

On peut écrire u(5) = u(4) + r = u(3) + 2r = u(2) + 3r = u(1) + 4r = u(0) + 5r ; on a donc u(5) = u(0) + 5r c'est-à-dire u(5) = 4 + 5 x 2 donc u(5) = 14.

Pour passer du terme u(0) au terme u(100), il faut rajouter 100 fois la valeur r. On peut donc écrire u(100) = u(0) + 100r, donc u(100) = 4 + 100 x 2 et u(100) = 204.

Exercice 4 Solution

1. Le nombre d'abonnés au 01/01/2000 est 12 000, donc u(1) = 12 000.

2. On sait que, tous les mois, sur les 1 000 abonnements arrivant à échéance, 750 sont renouvelés. Cela signifie que 250 abonnements sont perdus par le journal. Par ailleurs 320 abonnements nouveaux sont souscrits. Le journal gagne dont tous les mois 320 − 250 = 70 abonnements.

u(2) étant le nombre d'abonnés au 01/02/2000, on a donc : u(2) = u(1) + 70 = 12 000 + 70 donc u(2) = 12 070.

3. a. On a vu que, chaque mois, le nombre d'abonnements augmente de 70. Le nombre d'abonnements pour le mois (n+1) est donc égal au nombre d'abonnements pour le mois n augmenté de 70.

On a donc pour chaque n : u(n+1) = u(n) + 70. La suite u(n) est donc une suite arithmétique de raison 70.

b. On peut calculer u(12) en utilisant la relation u(n) = u(p) + (n − p) x r.

On a donc u(12) = u(1) + (12 − 1) x 70, c'est-à-dire u(12) = 12 000 + 11 x 70. On obtient u(12) = 12 770.

c. Le nombre d'abonnés au journal à la date du 01/12/2002 correspond à u(36) (35 mois se sont écoulés entre le 01/01/2000 et le 01/12/2002).

Puisque la suite u(n) est arithmétique de raison 70, on peut écrire :

$$u(36) = u(1) + (36 - 1) \times 70 = 12\,000 + 35 \times 70 = 14\,450.$$

Le nombre d'abonnés au journal à la date du 01/12/2002 est de 14 450.

Exercice 5 Solution

1. C(1) est le capital correspondant à l'année de rang 1, c'est-à-dire l'année 2001. Puisque les intérêts sont de 6,3% par an, le capital a été augmenté de 6,3% en un an, c'est-à-dire qu'il a été multiplié par 1,063.

On a donc $C(1) = C(0) \times 1{,}063 = 12\,618 \times 1{,}063$. On obtient après arrondi $C(1) = 13\,412{,}93$.

De la même façon, C(2) est le capital pour l'année 2002. On l'obtient en ajoutant 6,3% au capital de l'année 2001, c'est-à-dire en multipliant le capital de l'année 2001 par 1,063.

On a donc $C(2) = C(1) \times 1{,}063 = 13\,412{,}93 \times 1{,}063$. On obtient après arrondi $C(2) = 14\,257{,}94$.

Enfin C(3) est le capital pour l'année 2003. On l'obtient en ajoutant 6,3% au capital de l'année 2002, c'est-à-dire en multipliant le capital de l'année 2002 par 1,063.

On a donc $C(3) = C(2) \times 1{,}063 = 14\,257{,}94 \times 1{,}063$. On obtient après arrondi $C(3) = 15\,156{,}19$.

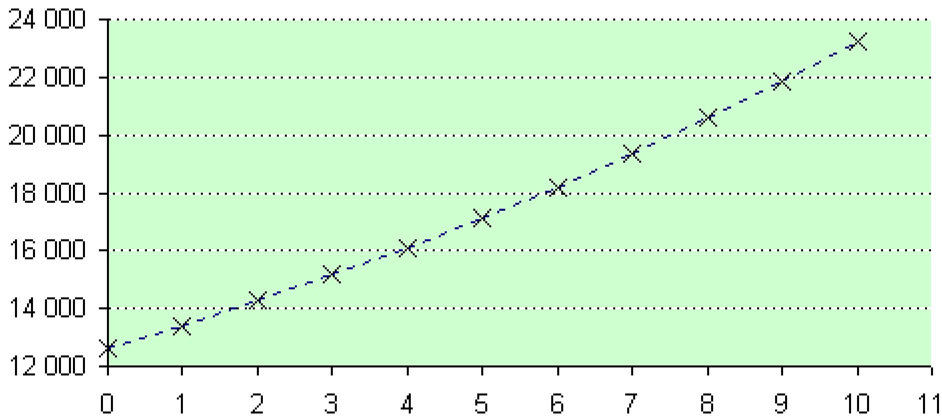
2. C(n+1) est le capital pour l'année 2000 + n + 1.

On l'obtient en ajoutant 6,3% au capital de l'année 2000 + n, c'est-à-dire en multipliant le capital de l'année 2000 + n par 1,063. On a donc, pour tout entier n : $C(n+1) = C(n) \times 1{,}063$.

3. En poursuivant le même procédé, on obtient le tableau :

Rang n de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Capital C(n)	12 618	13412,93	14257,95	15156,20	16111,04	17126,04	18204,98	19351,89	20571,06	21867,04	23244,66

4. Représentation graphique de C(n).



Exercice 6 Solution

1. v(n) étant une suite géométrique de raison q, on sait que pour tout entier n on a : $v(n+1) = v(n) \times q$. En prenant n = 2, on obtient $v(3) = v(2) \times q$; en prenant n = 3, on obtient $v(4) = v(3) \times q$.

On peut donc en déduire que $v(4) = v(3) \times q = v(2) \times q \times q$ donc $v(4) = v(2) \times q^2$.

2. En utilisant la relation $v(n+1) = v(n) \times q$ successivement avec n = 7, n = 6 et n = 5, on obtient $v(8) = v(7) \times q$, $v(7) = v(6) \times q$, $v(6) = v(5) \times q$. On en déduit $v(8) = v(7) \times q = v(6) \times q^2 = v(5) \times q^3$.

3. On peut écrire $v(7) = v(2) \times q^5$. En effet, comme précédemment on a :

$$v(7) = v(6) \times q = v(5) \times q^2 = v(4) \times q^3 = v(3) \times q^4 = v(2) \times q^5.$$

4. On suppose dans cette question que v(0) = 3 et q = 2.

On peut écrire $v(5) = v(4) \times q = v(3) \times q^2 = v(2) \times q^3 = v(1) \times q^4 = v(0) \times q^5$. On a donc $v(5) = v(0) \times q^5$ c'est-à-dire $v(5) = 3 \times 2^5$ donc v(5) = 96.

Pour passer du terme v(0) au terme v(100), il faut multiplier 100 fois par q.

On peut donc écrire $v(100) = v(0) \times q^{100}$, soit $v(100) = 3 \times 2^{100}$ d'où $v(100) \approx 3{,}803 \times 10^{30}$.

Exercice 7 Solution

1. Le village a 3123 habitants en 1995, on a donc P(1995) = 3123. Le nombre d'habitants diminue de 12 % par an, c'est-à-dire qu'il est multiplié par $1 - 0{,}12 = 0{,}88$.

On a donc $P(1996) = P(1995) \times 0{,}88 = 3123 \times 0{,}88$. Après arrondi on obtient P(1996) = 2748.

2. Tous les ans le nombre d'habitants diminue de 12 %, c'est-à-dire qu'il est multiplié par 0,88.

Sachant que P(n) est le nombre d'habitants pour l'année n, le nombre d'habitants pour l'année suivante, c'est-à-dire l'année n+1 est donné par : $P(n+1) = P(n) \times 0{,}88$. La suite P(n) est donc une suite géométrique de raison 0,88.

3. Puisque P(n) est une suite géométrique de raison 0,88 on sait que pour tout entier n et pour tout entier p, on a $P(n) = P(p) \times 0{,}88^{\,n-p}$.

En appliquant cette relation avec n = 2001 et p = 1995, on obtient :

$P(2001) = P(1995) \times 0{,}88^{(2001-1995)}$ donc $P(2001) = 3123 \times 0{,}88^{6}$. Après arrondi on a P(2001) = 1450.

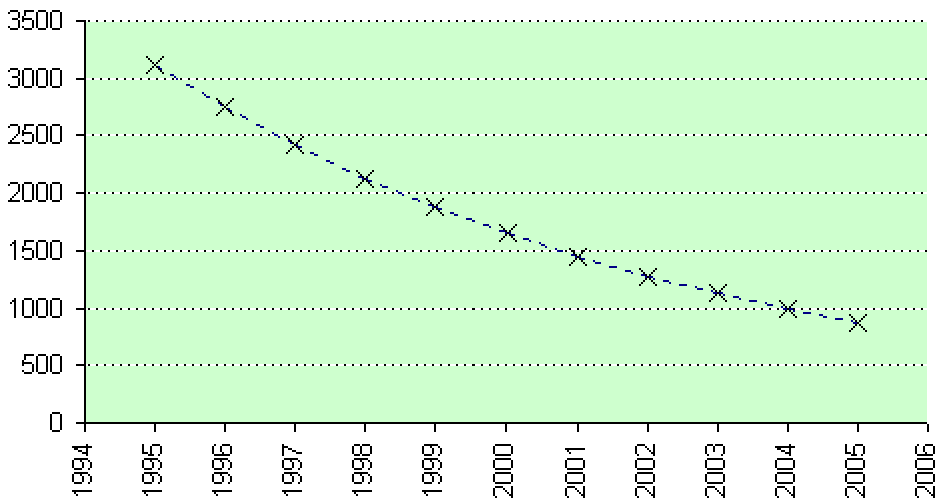
4. Pour que le nombre d'habitants ait diminué des deux tiers par rapport à 1995, il faut qu'il soit inférieur à $\frac{3123}{3} = 1041$.

En calculant successivement les termes de la suite P(n), on trouve que P(2003) = 1123 et P(2004) = 988. C'est donc en 2004 que la population aura diminué des deux tiers par rapport à 1995.

5. Après avoir complété le tableau :

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Nombre d'habitants	3123	2748	2418	2128	1873	1648	1450	1276	1123	988	870

on peut tracer la courbe représentant la suite P(n).



Exercice 8 Solution

1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(n)	1	2	4	8	15	23	32	44	58	73	91
Δ (n)	1	2	4	7	8	9	12	14	15	18	
S(n)	1	2	3	1	1	3	2	1	3		

La suite Δ (n) étant positive, cela signifie que la différence entre un terme et le précédent est positive, c'est-à-dire que pour tout n : u(n+1) − u(n) > 0, donc u(n+1) > u(n). La suite u(n) est donc croissante.

La suite S(n) étant positive, cela signifie que la suite Δ (n) est croissante. On peut donc conclure que la croissance de la suite u(n) est en augmentation.

2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(n)	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
Δ (n)	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
S(n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

La suite Δ (n) étant positive, cela signifie que la suite u(n) est croissante. La suite S(n) étant nulle, la croissance de la suite u(n) est "*régulière*". C'est une croissance linéaire puisqu'on sait que la suite u(n) est arithmétique.

3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u(n)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Δ (n)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	
S(n)	1	2	4	8	16	32	64	128	256		

La suite Δ (n) étant positive, cela signifie que la suite u(n) est croissante. La suite S(n) étant positive, la croissance de la suite u(n) est en augmentation. C'est une croissance exponentielle puisqu'on sait que la suite u(n) est géométrique.

Exercice 9 : solution

1. $U_1 = 500$, $U_2 = U_1 + \frac{12}{100}U_1 = 1,12U_1 = 560$, etc. C'est une suite géométrique de premier terme 500 et de raison $q = 1,12$.

2. $U_6 = q^{6-1}U_1 = 1,12^5 \times 500 = 881$.

3.

U_1	500
U_2	560
U_3	627
U_4	702
U_5	787
total	3176

4. Si on rajoute U_6 au total, on trouve plus de 4000 (4057) ; il faudra donc changer les machines pendant la sixième année.