

CRÉER DES MATHÉMATIQUES

Frédéric Laroche

On commence tout juste, alors que cette idée est prônée par certains depuis des années, à modifier la forme de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat et on s'intéresse aux formes d'exercices qui peuvent favoriser l'esprit d'initiative et de recherche chez les élèves. Rappelons que, contrairement à une représentation très répandue, la créativité est au cœur de l'activité mathématique : nous allons essayer d'en analyser le cheminement.

Le sujet de mathématiques du baccalauréat série S de 2003 a déchaîné les passions : l'argument principal de ses défenseurs fut qu'on mettait enfin des questions de recherche à l'examen, les détracteurs avancèrent entre autres qu'il est impossible à un élève de Terminale S normalement constitué de faire preuve de créativité dans ce type d'épreuve. Une controverse qui nous invite à chercher comment s'élabore la démarche de découverte des mathématiques chez les professionnels et si on peut la transposer chez les élèves.

1. *Partir de rien ?*

En cherchant le mot *mathématiques* dans l'Encyclopédia Universalis, on trouve un seul article sur la question, portant sur la créativité des enfants et dont voici un court extrait :

« On sait que la possibilité de créer est indispensable à la formation de la personnalité [...]. La mathématique offre [...] un champ pour la créativité. En mathématique, créer présente cette particularité que le créateur peut être juge objectif de sa création, ce qui n'est pas le cas dans le domaine de l'art. »¹

Autre point de vue, celui d'Emile Durkheim : « **Invention.** Il semble au premier abord qu'elle n'ait pas de place dans les mathématiques, où les vérités se déduisent toutes les unes des autres. Mais la géométrie telle qu'on l'enseigne n'est pas la géométrie telle que la fait le savant. Le théorème une fois trouvé, on le démontre en le rattachant à un autre déjà démontré ; mais il faut d'abord le trouver, et la démonstration suppose ainsi l'invention. Mais d'où nous vient la faculté d'inventer ? De l'imagination.[...]. Il n'y a pas de règle fixe pour l'emploi de l'imagination ; une seule s'impose à l'inventeur : soumettre sa proposition découverte à une vérification rigoureuse. »²

L'expression « *mais il faut d'abord le trouver* » résume avec simplicité la grande difficulté inhérente à toute recherche mathématique originale : créer quelque chose à partir du vide, avancer sur des terres inconnues où la pensée de l'homme ne s'est pas aventurée. Cette idée de création à partir de rien n'est généralement pas partagée par les chercheurs qui considèrent souvent à la manière de Platon que les mathématiques préexistent à leur découverte, gisant mollement dans le monde des Idées et attendant qu'un cerveau un peu plus excentrique que la moyenne vienne les réveiller... Nous ne discuterons pas ceci plus avant, mais on peut quand même penser que les mathématiques que nous créons et utilisons sont profondément liées à notre environnement immédiat et ne sont qu'une variété de mathématiques parmi une infinité d'autres possibles.



2. *Comment créer ?*

Question difficile ! Les mathématiciens n'ont que peu écrit sur leurs recherches personnelles et ce n'est que depuis le début du 20^e siècle que quelques textes peuvent nous éclairer. Voici ce que dit Jean Dieudonné, membre du groupe Bourbaki :

« Tous les grands mathématiciens qui ont parlé de leurs travaux se sont toujours plu à insister sur le rôle qu'y joue ce qu'ils appellent généralement leur intuition [...]. La difficulté est que ce que le mathématicien appelle intuition est pour lui une expérience psychologique tout à fait personnelle, à peu près incommunicable et il y a tout lieu de croire que les intuitions de deux mathématiciens sont le plus souvent très différentes. »³

Voilà qui commence bien ! Heureusement il précise un peu par la suite :

« En premier lieu, quand on commence à s'intéresser à une théorie qu'on ne connaissait pas avant, on n'en a aucune intuition, [...]. On se pose des questions que plus tard on estimera stupides, et on est incapable de faire par soi-même des raisonnements semblables à ceux que l'on lit. »⁴

Par exemple Henri Poincaré, lorsqu'il découvrait dans un ouvrage des notions nouvelles, refaisait toutes les démonstrations à sa manière, c'est-à-dire sans forcément suivre celles de l'ouvrage qu'il lisait, et ceci afin de s'imprégner complètement de ces idées.

Continuons notre lecture de Dieudonné : « Puis si l'on s'obstine, peu à peu le voile se lève ; on commence à comprendre pourquoi les mathématiciens qui ont contribué à la théorie ont procédé d'une certaine manière plutôt qu'une autre. Les objets de la théorie deviennent familiers [...]. C'est à ce moment qu'on peut avoir la chance d'apercevoir un nouveau théorème ou une nouvelle méthode. »⁵

Visiblement les maîtres mots sont choisir et comprendre : choisir telle direction et pas telle autre, comprendre profondément ce sur quoi on travaille. Ceci suppose une culture suffisante du sujet ; par exemple les principales notions algébriques sont issues en grande partie de questions de géométrie ou de théorie des nombres et les choix faits en algèbre devront rendre compte des questions initialement posées ; de même connaître les motivations des savants qui se sont penchés sur telle ou telle question ne peut qu'aider à la compréhension des théories plus modernes : pour reprendre l'exemple algébrique le produit vectoriel, notion fondamentale, a été inventé par Ampère et Maxwell afin de représenter les phénomènes électromagnétiques.



3. En attendant l'illumination

Pour s'attaquer à un problème, selon Alain Connes⁶ il ne faut surtout pas le prendre de front : on regarde la situation sous toutes ses coutures, on tente quelques essais (légers) dans une direction qui semble plus prometteuse qu'une autre, éventuellement on tente une attaque frontale, bref on s'imprègne du problème. Celui-ci résiste en général à ces stratégies ; il faut alors le laisser tomber et faire autre chose. Puis, petit à petit des idées, souvent inconscientes, commencent à prendre forme, des analogies avec des situations connues commencent à apparaître, de nouvelles stratégies sont testées.

Poincaré raconte ainsi sa découverte d'une classe particulière de fonctions : « [...] tous les jours je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude, je ne pus m'endormir : les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsienues, [...] je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures. »⁷

Jacques Hadamard décrit ainsi sa propre méthode⁸ : tout d'abord un travail préparatoire, qui comporte des essais et des erreurs, celles-là mêmes que l'on oublie de mentionner par la suite, puis se font jour des tentatives de gouverner l'inconscient, enfin se produit l'illumination. Hadamard insiste également sur l'imagerie mentale qui permet de faire travailler l'inconscient.

Le terme de gouverner l'inconscient est intéressant et on peut se demander ce qui se cache dessous : notre esprit fonctionne très souvent par analogie et en face d'une situation nouvelle va chercher dans sa mémoire si une situation semblable ne se serait pas déjà produite ; si c'est le cas la solution donnée la fois précédente pourra servir de fil directeur à la résolution de la situation actuelle. Le nombre de situations mathématiques n'est pas tel que l'on puisse n'avoir jamais rencontré l'analogue de l'une d'entre elles et, si c'était le cas, il faudrait faire un grand effort d'invention. On comprend mieux ce qui fait la différence entre les mathématiciens : certains sont des inventeurs dans le sens où ils sont capables de dépasser la représentation mentale par analogie, où ils peuvent faire preuve d'imagination et inventer des concepts entièrement nouveaux ; ces gens sont peu nombreux finalement et même si la mise en forme de leurs travaux a souvent laissé à désirer, leur apport à la connaissance est incomparable.

Que se passe-t-il après l'illumination ? Pour Alain Connes⁹ : « Le processus de vérification est très douloureux, parce qu'on a peur de s'être trompé. C'est en fait la phase la plus angoissante, parce qu'on ne sait jamais si son intuition est juste. »

Que celui qui ne s'est jamais trompé lui jette la première pierre ! Poincaré trouvait cela tellement ennuyeux et était tellement sûr de son intuition qu'il laissait à d'autres le soin de mettre ses idées lumineuses au

propre (ce qui d'ailleurs lui a joué quelques tours, et il a été obligé de rembourser certaines publications hâtives...)

Finalement un certain nombre de conditions semblent devoir être réunies pour faire un mathématicien créatif : une capacité à traduire le langage symbolique en langage « géométrique » et réciproquement, une culture étendue et un savoir conséquent, une imagination suffisante pour pouvoir sortir des sentiers battus.

Il nous reste à répondre au pourquoi ... Malheureusement peu de textes existent sur la question, aussi, mis à part la notion d'utilité qui a évidemment son rôle à jouer, on peut penser que la curiosité gratuite est le moteur essentiel de la découverte. Si vous avez déjà eu l'occasion de vous pencher sur un problème difficile (ailleurs que dans un examen ou un concours) vous saurez de quoi nous parlons : on commence de façon insouciante et on finit huit jours plus tard complètement épuisé intellectuellement. Mais quel bonheur quand on trouve, quelle joie lorsqu'on vient à bout des pires difficultés (à son niveau personnel bien sûr) et quelle déception lorsqu'on s'aperçoit qu'on s'est trompé...



4. Et à l'école ?

C'est peut-être là que réside le secret, dans le dépassement de soi-même, et l'école a certainement son rôle à jouer sur ce point. L'élève, l'étudiant, l'adulte en situation de recherche et qui trouve essaiera de nouveau de retrouver cette joie intense d'être un être pensant. Il n'y a guère qu'en mathématiques que cette émotion peut être ressentie et il est tout à fait possible d'y amener les élèves (mais certainement pas pendant un examen...).

On voit bien cependant les difficultés qui se présentent à l'enseignant : a-t-il déjà été mis lui-même en situation de recherche vraie ? A-t-il les moyens pédagogiques et techniques de provoquer l'acte de recherche ? La première question demande une réponse personnelle, pour la deuxième, on sait bien que les habitudes rendent difficile la mise en recherche vraie des élèves. Certains pensent que la solution est dans le jeu : les concours type Kangourou ou les rallyes mathématiques amènent effectivement à des questions ouvertes, souvent anecdotiques malheureusement, et ne peuvent que difficilement prétendre à devenir un outil de base. D'autant plus que le jeu n'est probablement pas une solution en soi : sans vouloir être rabat-joie, il y a une différence fondamentale entre la recherche et ce qu'elle peut représenter comme souffrance et joie personnelles et le jeu, simple divertissement de l'esprit.



L'éducation mathématique développe occasionnellement la mémoire, la minutie, le sens pratique, les facultés d'abstraction, etc., mais le plus important est de cultiver l'intelligence qui est l'aptitude à faire face à des situations nouvelles et à saisir des relations. C'est la recherche de problèmes qui est l'activité mathématique la plus importante. Contrairement aux exercices d'exposition, le contenu mathématique importe peu dans un problème : l'important est de susciter un élan de curiosité et de déclencher un comportement de recherche.

Cependant notre système d'enseignement méconnaît gravement cet aspect. Nombreux sont les étudiants qui sortent brillamment diplômés de nos universités sans avoir vraiment résolu un seul problème de leur vie : il ne leur est jamais arrivé d'être obsédé par une question pendant plusieurs semaines, d'avoir lentement pris conscience de la nature des difficultés, et d'aboutir à la suite d'un long processus à une illumination qui dévoile la réponse ou à l'abandon pur et simple du problème car trop difficile...

L'initiation à la recherche des problèmes va à l'encontre de certaines attitudes : nombreux sont ceux qui se sentent coupables lorsqu'ils « sèchent » longtemps sur un problème ; ils ont à tort l'impression de perdre du temps : le temps passé à s'approprier les difficultés sera récupéré largement lorsqu'une situation semblable se représentera. L'attitude « plus efficace » qui consiste à se reporter immédiatement à une réponse toute rédigée n'apportera en aucun cas les mêmes résultats.

Tout enseignement mathématique digne de ce nom doit initier l'élève à l'aventure du problème ; pour cela l'éducateur devra lutter contre de nombreux obstacles qui incitent à la passivité et au conformisme. La recherche de problèmes n'est pas une activité aisément compatible avec des horaires stricts, réalisée en temps limité.

Il est difficile d'exiger d'un élève qu'il résolve un problème et mette la solution par écrit dans un devoir sur table : d'ailleurs le succès peut-il donner lieu à une (bonne) note puisque l'échec ne saurait être

sanctionné ? Il y a là une contradiction que chacun devra apprendre à surmonter avec ses classes : cela ne se peut que dans une relation de confiance avec les élèves et le contournement de certaines règles communément admises...

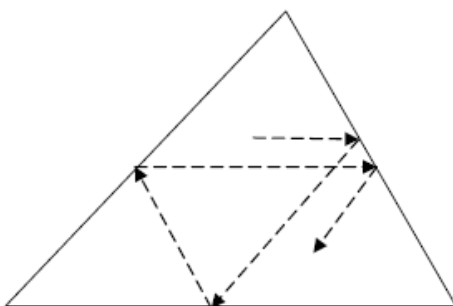
Il existe quand même quelques possibilités. Proposer une gerbe d'exercices de recherche avec survalorisation du résultat (comme rajouter des points au prochain contrôle) est facile à mettre en œuvre et très rentable ; même si on ne le fait que deux ou trois fois dans l'année on obtient facilement la coopération de la majorité des élèves. Faire effectuer une recherche documentaire sur tel ou tel problème avec compte-rendu à la classe : les aspects historiques passionnent souvent les élèves et montrer comment on s'est sorti d'une difficulté majeure apporte énormément à la réflexion individuelle. Les possibilités de recherche sur ordinateur sont également intéressantes même si elles demandent un temps de préparation plus long. Bref, avec un peu d'imagination et de bonne volonté on peut obtenir un changement intéressant des mentalités et des comportements ainsi qu'une adhésion profonde au projet pédagogique.

La recherche de problèmes est une activité libre à laquelle on se livre par goût d'une façon désintéressée : on comparera le statut du Problème dans l'enseignement des mathématiques à la lecture des oeuvres littéraires ne figurant pas au programme dans l'enseignement du français ; le maître sèmera de temps en temps des idées de problèmes dans l'espoir de récolter un comportement de recherche ; mais lorsque l'inspecteur viendra passer une heure dans la classe, il n'apercevra peut-être pas ce qui germe dans la tête des enfants et il ne pourra juger si l'initiative du professeur est sur le point de porter ses fruits. Ainsi s'agit-il souvent pour le maître d'une activité gratuite à laquelle il n'est pas réglementairement astreint. Cependant la résolution d'un problème est une aventure d'une telle intensité qu'elle fait date dans la mémoire de tous ceux qui l'ont vécue. Heureux le professeur qui la révèle à ses élèves !

On pense d'ailleurs souvent qu'il s'agit là d'une activité réservée aux seuls génies en herbe : il n'en est rien. De très jeunes enfants, des débiles mentaux et même les animaux parviennent à résoudre des problèmes, la seule différence est que des individus d'intelligence exceptionnelle résoudront des problèmes très difficiles alors que des gens moins doués viendront à bout de questions plus compatibles avec leur niveau. L'histoire ou la légende relate les Eurékas mémorables d'Archimède, Newton ou Gauss, mais on ne prend pas la peine de conter comment une couturière opère une coupe d'un seul trait de ciseaux ou un charpentier dessine une jonction dans sa tête avant de tailler ses poutres : ceci dit, les comportements de recherche sont analogues, bien que plus maladroits et souvent moins structurés.



Dans une classe de quatrième, plutôt faible en mathématiques, les élèves n'avaient encore résolu que des exercices d'exposition, jalonnés d'indications qui conduisaient à la solution. C'est alors que le professeur dessina la figure suivante au tableau où les segments fléchés sont parallèles à l'un des côtés du triangle. Il suggérait ainsi à la classe de déceler une particularité de cette figure. La « question » était proclamée facultative, ne donnant lieu à aucune note et aucun délai n'était fixé.



La semaine suivante le professeur fut harcelé de questions à la fin du cours sur ce qui était vraiment demandé : la seule indication fournie fut l'incitation à dessiner soigneusement de nombreuses figures pour observer le phénomène. Ce ne fut que la semaine suivante que quelques groupes é mirent l'opinion que la ligne, convenablement prolongée, devait se refermer... Le professeur résista à la tentation de souffler la réponse... Enfin, la semaine suivante quelques élèves parvinrent à démontrer la conjecture.

Certains souriront peut-être en pensant qu'il avait fallu trois semaines à ces élèves faibles pour venir à bout d'une question triviale, mais pour les collégiens concernés il s'agit d'une étape qui fera date dans leur formation mathématique : ce sera **le premier problème qu'ils auront résolu** sans aide. Quiconque a

déjà résolu un problème en résoudra ultérieurement d'autres, qui ne seront pas nécessairement aussi faciles : un palier décisif dans l'éducation mathématique sera ainsi franchi.

Cet épisode comporte un autre enseignement pédagogique : la recherche d'un problème peut être fort longue et le maître doit résister à la tentation de donner une solution trop tôt. De nombreuses observations montrent que des professeurs, sceptiques sur l'aptitude de leurs élèves à surmonter des difficultés, ont eu la surprise d'être démentis par les faits, mais dans des délais beaucoup plus longs qu'ils croyaient raisonnables d'octroyer au départ. Nous sommes très mauvais juges pour estimer la difficulté d'une question pour nos élèves : le mathématicien adulte sous-estime certaines difficultés, même pour les débutants doués.

Par exemple à Moscou, dans une classe d'élite, un jeune vainqueur d'Olympiade mit plus de quinze jours pour réinventer la démonstration de la continuité du produit de deux fonctions continues. Le « truc » est pourtant classique mais à quatorze ans le champion l'ignorait. Et, après tout, cet artifice n'est pas si facile à redécouvrir : $(f(x).g(x) - f(x).g(a) + f(x).g(a) - f(a).g(a))$. Inversement un enseignant qui n'a jamais résolu un problème lui-même sera tenté de sous-estimer la possibilité d'en résoudre : au lieu d'encourager l'élève à la persévérance dans la recherche, il aura plutôt tendance à freiner l'initiative.

L'entraînement à la recherche de problèmes (*heuristique*) est un des éléments les plus importants dans la formation mathématique des maîtres : ce n'est pas le contenu mathématique d'un problème, c'est l'incitation à un comportement de recherche qui importe. Un problème perd sa valeur dès que la réponse est connue : l'intérêt du problème de Fermat ($a^n + b^n = c^n$) ne tient pas à sa réponse ; à quoi nous sert-il de savoir qu'il n'existe aucune autre solution que 2 ? Par contre les recherches induites par le problème ont débouché sur de nombreuses méthodes nouvelles ; l'énoncé est si court, si simple, son apparence si facile a exercé une réelle fascination sur des générations d'amateurs qui n'imaginaient pas les difficultés sous-jacentes.

Pour traiter un problème, en effet, il faut pouvoir (et l'énumération n'est pas exhaustive) se prendre au jeu d'une recherche gratuite par certains côtés, supporter des émotions souvent intenses, s'activer à imaginer des hypothèses, à bâtir des stratégies, à alimenter un questionnement permanent, s'arracher à la paralysie qui tend à envahir l'esprit, se hasarder dans l'inconnu sans savoir si l'on va trouver, tolérer un certain désordre intérieur, se plier à vérifier et critiquer les cheminements dans lesquels on s'est engagé, s'exposer à l'erreur et à l'échec. Autant dire qu'à la violence et à l'insistance du problème doivent répondre l'audace et la ténacité de celui que entreprend de s'y coller.

On peut alors tout à fait comprendre qu'il soit plus confortable et surtout plus économique à certains de court-circuiter purement et simplement le temps de la recherche - temps de la mobilisation et de l'incertitude intellectuelles. En ce cas, on voit l'apprenant attendre que la solution lui soit donnée, estimant -à tort- que comprendre le corrigé revient à savoir faire le problème - alors que, faute d'avoir été réellement vécue, l'expérience du problème restera lettre morte et sera difficilement réutilisable ultérieurement¹⁰.

Un bon énoncé de problème doit « appâter » adroitement l'élève sous une apparence anodine. Mais dès qu'on s'y essaie, on se sent empoigné à mesure que la solution se dérobe. Le véritable connaisseur refuse alors de se laisser souffler la réponse en même temps qu'il désire ardemment la trouver. Un énoncé de problème se rédige d'une façon radicalement différente d'un exercice d'exposition : on ne jalonne l'énoncé d'aucune indication susceptible de dévoiler les « astuces ». Au contraire il y a un art de dissimuler la difficulté, de provoquer le défi, de proposer des enjeux (non nécessairement matériels), de stimuler le désir de vaincre. Ce camouflage de la solution n'est pas motivé par le désir cruel de faire chercher inutilement, mais au contraire de provoquer l'effet de surprise lorsque la réponse se dévoilera : il s'agit de renforcer le contraste entre l'obscurité initiale et l'évidente simplicité de la réponse... lorsqu'on l'aura trouvée.

Trouver l'ensemble des points A du globe terrestre tels qu'en partant de A, en se déplaçant d'abord de mille kilomètres vers le sud, puis de mille kilomètres vers l'est et enfin de mille kilomètres vers le nord, on se retrouve au point A.

Voilà bien un énoncé diabolique ! N'importe qui trouvera facilement un point A répondant à la question et pensera d'abord que c'est le seul... Il trouvera la question sans intérêt. Avant ainsi perdu une première fois son pari, il finira par trouver un autre ensemble (moins évident) de points A. Mais las ! il ne sera pas encore au bout de ses peines...

Résoudre un problème habituellement c'est souvent le réduire à une suite de nombreuses vérifications : il s'agit d'insérer entre les données et la réponse une chaîne de questions faciles. Mais la difficulté consiste à

imaginer l'itinéraire de pensée qui conduit à la conclusion. Il convient d'entraîner les débutants à intercaler une ou deux étapes intermédiaires dans une démonstration : un professeur doit être apte à trouver les quatre ou cinq chaînons qui interviennent dans un problème

Les mathématiciens professionnels échafaudent couramment des raisonnements qui nécessitent la découverte d'une cinquantaine d'intermédiaires : pour y parvenir ils s'imprègnent progressivement, pendant des mois, de la compréhension du problème et peu à peu ils prennent conscience des difficultés partielles qu'ils auront successivement à surmonter.

« Toutes les fois qu'une difficulté se présente, nous devons être capables de reconnaître aussitôt, s'il est possible d'examiner préalablement certaines choses, quelles elles sont et dans quel ordre il faut les examiner »¹¹

Dans les raisonnements les plus quotidiens, on a souvent à atteindre un but où l'on ne connaît que la situation initiale et le résultat escompté : on ne dispose généralement pas d'un professeur complaisant qui vient mâcher la besogne, nous soufflant l'ordre des opérations à effectuer. N'importe quel mécanicien qui recherche la panne d'un moteur, n'importe quelle couturière avant de donner le coup de ciseau irréparable, doivent apprendre à aborder une difficulté et à réfléchir avant d'entreprendre une série de tâches. Il s'agit donc d'un entraînement qui n'est pas exclusivement réservé aux seuls futurs chercheurs mathématiciens.



Aux diverses activités de l'élève et du professeur correspondent des énoncés dont la finalité est différente. On peut distinguer sept catégories, cette classification n'étant ni exhaustive, ni non-disjonctive. Cependant le tableau suivant semble fondamental :

Sigle	Catégorie d'énoncés	Comportement de l'élève	Comportement du professeur
EE	Exercices d'exposition	Apprendre. Acquérir des connaissances	Exposer incomplètement Transmettre des connaissances.
P	Problèmes	Chercher, "trouver".	Susciter la curiosité. Encourager la persévérance dans la recherche
ED	Exercices didactiques	S'entraîner. Acquérir des mécanismes.	Fixer des connaissances, des aptitudes, des habitudes.
ETT	Exécution de tâches techniques	Prendre ses responsabilités. Mener un travail à bonne fin en prenant l'engagement de ne pas laisser subsister d'erreurs.	Inciter à la minutie, au soin. Exiger un travail bien fait.
A	Exemples d'illustration Exercices d'application	Transférer des connaissances théoriques dans un contexte pratique.	Rattacher l'abstrait à d'autres centres d'intérêt.
M	Manipulations.	Observer. Expérimenter. Bricoler.	Motiver les résultats d'une étude abstraite ultérieure.
T	Tests. Sujets de compositions, d'examens, de concours.	Vérifier la valeur de ses connaissances Faire valoir ses aptitudes.	Contrôler les résultats de l'enseignement sur chaque élève.

Chacune de ces catégories relève d'une pédagogie différente : les énoncés correspondants se rédigent conformément à des principes variés, parfois opposés.



5. Quelques ouvrages/sites à lire/consulter :

Claude-Paul Bruter, *Comprendre les mathématiques*, Odile Jacob, 1996

Stanislas Dehaene, *La bosse des maths*, Odile Jacob, 1997

Jean Dieudonné et al., *Penser les mathématiques*, Points Science, 1982
Frédéric Laroche, *Promenades Mathématiques*, Ellipses, 2003
Jean Piaget et al., *Logique et connaissance scientifique*, La Pléiade, 1967
Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse*, (1902), Champs Flammarion, 1999
Henri Poincaré, *La valeur de la science*, (1905), Champs Flammarion, 1970
André Weil, *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, 1991
George Polya, *Comment poser et résoudre un problème (1965)*, J. Gabay, 1994
Le livre du problème (6 volumes, 1971)

http://irem.u-strasbg.fr/php/online/livre_pb/1/Pb1_Pedagogie.pdf

Wims et autres : utilisation de base de données d'exercices

http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/110_Gueudet.pdf

Rallye Mathématique Transalpin <http://www.rmt-sr.ch/archives.htm> (bonne source d'exercices avec justification pédagogique)

INRP : Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques

http://www.inrp.fr/vst/Dossiers/Demarche_experimentale/sommaire.htm

IREM Montpellier : résolution collaborative de problèmes

<http://www.irem.univ-montp2.fr/Resolution-de-problemes>

¹ Encyclopédia Universalis, article *Créativité enfantine et mathématiques*, Nicole Picard, 2003.

² Emile Durkheim, Cours de philosophie fait au Lycée de Sens, 1884,
<http://www.relst.uiuc.edu/durkheim/Texts/1884a/49.html>

³ Jean Dieudonné, *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987

⁴ *ibid.*

⁵ *ibid.*

⁶ Alain Connes et Jean-Pierre Changeux, *Matière à Penser*, Odile Jacob, 2000

⁷ Henri Poincaré, *Science et Méthode*, Ed. Kimé, 1999

⁸ Jacques Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Gautier-Villars, 1952 (réed. J. Gabay, 1998)

⁹ Voir note 6

¹⁰ M. Vinais : <http://mvinais.pagesperso-orange.fr/michelvinais/resolutionproblememath.htm>

¹¹ R. Descartes - Règles pour la direction de l'esprit - Règle VI.