Terminale S – TP : Etude d'une transformation du plan complexe

1. Fiche élève.

φ est l'application qui, à chaque point *M* d'affixe *z*, fait correspondre *M*' d'affixe *z*', $z'=\dfrac{20}{\bar{z}}$.

1. Exprimer les coordonnées de *M*' en fonction des coordonnées de *M*.

2. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure dans laquelle *M* est un point libre dans le plan et *M*' est l'image de *M* par φ ; faire apparaître à l'écran l'affixe de *M* et celle de *M*'.

3. En déplaçant le point *M* à la souris, déterminer les points invariants par φ. Vérifier cette conjecture par un calcul.

4. a. Construire dans la figure précédente la droite (d) d'équation $y = x + 4$.
b. Déterminer expérimentalement l'image de (d), soit l'ensemble des points *M*' lorsque *M* parcourt (d).
c. Déterminer expérimentalement l'ensemble des points *M* tels que *M*' soit sur (d).

5. a. Construire dans la figure précédente le cercle (C) de centre *O*, de rayon 10.
b. Déterminer expérimentalement l'image de (C).
c. Déterminer expérimentalement l'ensemble des points *M* tels que *M*' soit sur (C).

6. Déterminer de même les images de :
   a. Un cercle passant par *O*.
   b. Un cercle quelconque.
   c. Une droite passant par *O*

2. Commentaires

La transformation, dans le présent exemple, est une inversion mais l'élève n'a pas à le savoir, et n'a pas à utiliser la commande "inversion", présente dans certains logiciels.

Eléments de réponses :

1. $x'=\dfrac{20x}{x^2+y^2}$, $y'=\dfrac{20y}{x^2+y^2}$
2. Méthode légèrement différente selon le logiciel employé;voir ci-dessous.
3. Par tâtonnements on conjecture que l'ensemble des points invariants est un cercle de centre 0, de rayon 4,5 environ; un calcul (très simple) montre que la valeur exacte du rayon est $\sqrt{20}$; pour le vérifier expérimentalement, construire ce cercle sur la figure, et placer M dessus.
4. b. Il est très facile, avec la fonction "trace", de voir que le lieu de M' est porté par un cercle; l'élève devra voir que ce lieu est le cercle *privé d'un point.*
c. Deux méthodes, d'inégale valeur :
- simple tâtonnement : on constate que, pour que M' reste sur d, il faut déplacer M sur un cercle
- (*pour cette transformation-ci)* s'apercevoir, par un calcul élémentaire, que $z=\varphi(z')$; placer M sur le cercle trouvé en b)
5. L'image de C est un cercle C'; mêmes remarques qu'en 3.
6. a. Une droite.
b. Un cercle (faire remarquer que, quand le cercle donné passe de plus en plus près de *O*, le cercle image a un rayon de plus en plus grand, et "ressemble de plus en plus à une droite".
c. La droite elle-même.

Figure GeoGebra : Les objets sont nommés automatiquement au fur et à mesure de leur création ; pour changer leur nom et les rendre conformes à l'énoncé : clic droit sur l'objet, puis "renommer".

M est, au départ, un point libre dans le plan ; pour 4. : clic droit sur *M*, "redéfinir", *M* = Point[*d*] ; de même en 5. : "redéfinir", *M* = Point[*c*] ; si on veut revenir à *M* libre : "redéfinir", *M* = (1, 3) (ou tout autre couple de coordonnées).
Attention, cette dernière manipulation sera refusée si le lieu de *M*' est tracé ; l'effacer préalablement.
Pour 4. b., on peut aussi utiliser "lieu", clic sur *M*', clic sur *M*; mais dans ce cas l'élève risque de ne pas voir que le cercle est privé d'un point.
Pour affichage de l'affixe : Texte ; "z="+x(M)+"+"+y(M)+"i"

Figure Cabri
Je ne dispose que de Cabri II ; avec Cabri II Plus, il y a peut-être des simplifications.
On place un point libre M, on affiche ses coordonnées; outil "calculatrice" : $20*x/(x^2+y^2) \rightarrow$ résultat 1 ; $20*y/(x^2+y^2) \rightarrow$ résultat 2 ;
"report de mesure" : à partir de O, sur (Ox), on reporte résultat 1 : point A ; à partir de O, sur (Oy), on reporte résultat 2 : point B.
On construit la parallèle à (Oy) passant par A, la parallèle à (Ox) passant par B, leur intersection est M'
On peut alors cacher ces deux droites, ainsi que (facultatif) les coordonnées de M et de M'; préalablement on aura affiché les affixes en cliquant sur "texte", puis on tape z=(on clique sur l'abscisse)+(on clique sur l'ordonnée).i
0n construit d, et C; on place un point sur d, un point sur C; pour placer M sur d: redéfinir un objet, clic sur M, on choisit "identifier à un autre objet", on clique sur le point de d; pour rendre M libre à nouveau : redéfinir, on choisit "point". On utilise "trace" et/ou "lieu" comme dans Geogebra.

Figure Geoplan
Créer un point libre dans le plan; créer (numérique, calcul géométrique) x et y abscisse et ordonnée de M; créer (numérique, calcul algébrique) $20x/(x^2+y^2)$, nommé x', $20y/(x^2+y^2)$, nommé y'; créer M' point repéré, de coordonnées (x', y'); créer la droite d, le cercle C.
On dispose ici de la fonction "trace", mais pas de "lieu"; je n'ai pas trouvé de moyen de faire afficher les affixes (mais seulement les coordonnées)
Pour placer M sur d : créer point libre sur une droite : droite d, le nommer M ; à "voulez-vous redéfinir M?", répondre oui; idem pour le placer sur C, etc.

3. Autres exemples.
La définition de φ peut varier à l'infini; les questions seront globalement semblables, mais devront être adaptées à chaque cas ; à titre d'exemple, je joins la figure GeoGebra correspondant à $z' = z^2$: outre les deux points invariants facilement obtenus par calcul, on y découvre que l'image d'une droite semble être une parabole, et que celle d'un cercle ressemble fortement à une cardioïde !
On pourra aussi choisir pour φ une transformation étudiée en cours (rotation, homothétie,…, similitude en spécialité); on pourra alors demander de la reconnaître et de déterminer ses caractéristiques.