

Inversion

On considère l'hyperbole équilatère H d'équation $y = \frac{1}{x}$, la rotation r de centre O , d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et la transformation du plan complexe privé de l'origine : $f : z \mapsto z' = \frac{1}{z}$.

Les justifications de votre travail peuvent être apportées par tous les moyens à votre disposition...

Commentaire : ce tp a été fait en trois temps avec une TS de 32 élèves de niveau « normal ».

- classe entière 1 heure : explications sur le fonctionnement d'Excel, compléments mathématiques ;

- 1/2 groupe salle info 1 heure : manipulation d'Excel, tracé de courbes ;

- 1/2 groupe salle info 1 heure : réalisation du tp.

1. Hyperboles

a. Tracer H dans la fenêtre $[-5 ; +5] \times [-5 ; +5]$.

b. Tracer la courbe $H' = f(H)$. Montrer que si $M'(x', y')$ est un point de H' alors $x'^2 - y'^2 = \alpha$ où α est une constante à déterminer.

c. On pose pour tout t réel tel que $\cos t$ ne soit pas nul, $\begin{cases} x' = \frac{k}{\cos t} \\ y' = k \tan t \end{cases}$. Quelle est la valeur de la constante k ?

Commentaire : le premier groupe a fait cette partie avec quelques difficultés. Tous ont utilisé Excel.

2. Lemniscate

Soit la courbe Γ , ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, t \in]-\pi ; \pi[\\ y = \tan t \end{cases} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

a. Par quelle transformation simple passe-t-on de H' à Γ ?

b. Soit N d'affixe $z = x + iy$ d'image par f : N' d'affixe $z' = x' + iy'$. Vérifier que $\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$.

c. Tracer l'image par f de Γ . On note L cette courbe qui est donc l'image de H par une succession de transformations.

d. Soit T une tangente à H en un point quelconque. L'image de T par les transformations précédentes devient-elle une tangente à L ?

e. Soit ABC un triangle constitué de trois points non alignés de Γ , $A'B'C'$ son triangle image sur L . Comparer les angles de ces deux triangles. Constatation ?

f. De même comparer les longueurs des côtés des deux triangles. Constatation ?

Commentaire : j'ai donné au deuxième groupe le fichier Excel avec la première partie et ils ont travaillé sur celle-ci. Globalement on s'aperçoit qu'il faut une formation beaucoup plus en amont... Les difficultés rencontrées étant essentiellement techniques.

3. Aires

- a. On veut calculer l'aire comprise entre H, l'axe (OX) les droites $x=1$ et $x=5$. A l'aide de ce que vous avez fait en 1. que suggérez-vous sans calculer d'intégrale.
- b. Même question pour la longueur de la portion de H compris entre $x=1$ et $x=5$.
- c. Pouvez-vous donner une valeur approchée de la longueur totale de L ?

Commentaire : fait en classe ultérieurement.