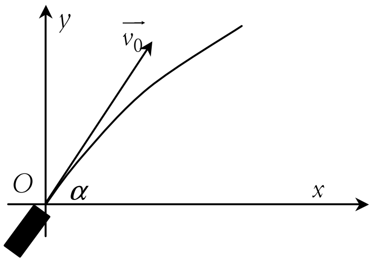
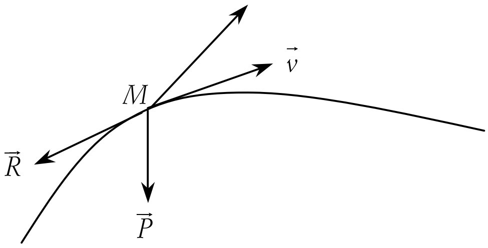
La méthode d'Euler : lancer d'un projectile

A. Fiche élève



Le modèle est celui du canon : un obus est tiré dans l'axe du canon, suivant un angle α avec l'horizontale. L'obus sort de la bouche du canon avec une vitesse initiale v_0 et suivant la tangente à la trajectoire.

A un moment donné, les forces agissant sur l'obus sont la résistance de l'air $\vec{R}$, proportionnelle au carré de la vitesse, dirigée à l'opposé de cette dernière (la vitesse est un vecteur représenté par la tangente à la trajectoire) et le poids $\vec{P}$ orienté vers le bas.



Nous regardons tout d'abord ce qui se passe lorsqu'on ne tient pas compte des frottements.

On a dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les coordonnées $(x(t)\,;y(t))$ du centre de gravité M de l'obus, la vitesse $\vec{v}(x'(t)\,;y'(t))$ et l'accélération $\vec{a}(x''(t)\,;y''(t))$. Les conditions initiales sont

$$M_0 = O = (x(0)\,;y(0)) = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{v_0} = (x'(0)\,;y'(0)) = (v_0 \cos\alpha\,;v_0 \sin\alpha).$$

Les équations du mouvement sont en suivant les lois de Newton :

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} \Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g} \Leftrightarrow \begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases} \quad (\mathbf{1}).$$

Toutes les représentations se feront avec un angle α de 60° et une vitesse v_0 de 100 m.s^{-1}. Ces valeurs seront stockées dans les cellules B1 et B2 du tableur de manière à pouvoir être modifiées.

1. On pose $X(t) = x'(t)$ et $Y(t) = y'(t)$.

a. Vérifier que l'approximation affine du système (**1**) est $\begin{cases} X(t+h) = X(t) \\ Y(t+h) = Y(t) - gh \end{cases}$ (**2**).

b. Quelles conditions initiales donneriez-vous ?

c. Représentez les solutions $X(t)$ et $Y(t)$ à l'aide du tableur (500 valeurs). Quelle est l'interprétation physique de ces solutions ?

d. Calculez pour toutes les valeurs précédemment obtenues la quantité $\varphi(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}$. Interprétez les résultats physiquement.

2. a. Donnez la solution exacte du système $\begin{cases} X'(t) = 0 \\ Y'(t) = -g \end{cases}$ avec les conditions initiales $\begin{cases} X(0) = v_0 \cos\alpha \\ Y(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$. Que vaut la quantité φ ?

b. Evaluez l'écart entre les solutions exactes et celles obtenues par la méthode d'Euler. Que pensez-vous du résultat ?

3. On cherche la trajectoire de l'obus.

a. Montrez que le problème revient à résoudre

$$\begin{cases} x'(t) = X(t) \\ y'(t) = Y(t) \end{cases} \quad (\mathbf{3})$$

où X et Y sont les solutions trouvées précédemment.

b. Vérifiez que l'approximation affine du système est $\begin{cases} x(t+h) = x(t) + hX(t) \\ y(t+h) = y(t) + hY(t) \end{cases}$. Quelles sont les conditions initiales ?

c. Représentez les solutions $x(t)$ et $y(t)$ à l'aide du tableur (500 valeurs). Quel est le type de courbe obtenue ?

d. On veut atteindre avec l'obus une cible située à 1 km de distance. Quelle doit-être l'inclinaison du canon ?

4. Vérification des solutions et de la trajectoire

a. Montrez que les solutions exactes du système sont $\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}$.

b. Tracez ces solutions sur la même représentation qu'au 3.

c. Calculez l'écart entre les solutions exactes et celles du 3. Conclusion.

d. Vérifiez que la courbe décrite par l'obus a pour équation $y = -\frac{g}{2v_0^2}(1+\tan^2\alpha)x^2 + x\tan\alpha$.

e. Quelle doit-être l'inclinaison du canon pour atteindre avec l'obus une cible située à 1 km de distance ?

B. Commentaires

Cette méthode fait appel à la notion *d'approximation linéaire* d'une fonction en un point : si *f* est dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$; en ne passant pas à la limite, mais en prenant *h* suffisamment petit, on peut écrire $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) \Rightarrow f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

On dispose en général d'une relation du type $f'(x) = \varphi(x, f(x))$ (une équation différentielle), ce qui permet lorsqu'on connaît x et $f(x)$ de calculer $f'(x)$.

Il s'agit alors de construire la courbe de la fonction inconnue *f* en utilisant ces relations : on part d'un premier point x_0, d'ordonnée connue $f(x_0)$, on en déduit le point $x_1 = x_0 + h$ d'ordonnée

$$f(x_1) = f(x_0+h) \approx f(x_0) + hf'(x_0) = f(x_0) + h\varphi(x_0, f(x_0)).$$

Il reste à recommencer de nombreuses fois pour se faire une idée de la courbe de la fonction *f*.

Evidemment tout ceci reste approximatif, mais dans de nombreuses situations il est impossible ou très difficile de faire mieux.

Au niveau physique la question est traitée en cours de physique, mais sans rentrer dans les détails. On ne fait pas intervenir les frottements ici, mais lorsque c'est le cas la situation devient beaucoup trop complexe. Il y a quand même le cas de la chute verticale où une solution analytique est à la portée des élèves. Si vous êtes intéressés, voir http://promenadesmaths.free.fr/chute_des_corps/Chute_libre.pdf dont je peux fournir le texte en word.

C. Pédagogie

Barême : 1 point par partie (autant faire simple).

Les résolutions analytiques sont vraiment très simples, mais ce n'est pas l'objectif ici. Par contre le fait de se frotter à un système du second ordre est fort intéressant et montre la puissance des méthodes numériques.

Il me semble qu'il faut insister lourdement sur le contrôle de l'erreur, qui est ici possible grâce à la résolution exacte. Si on fait intervenir les frottements, il n'y a plus de solution exacte et le contrôle est évidemment beaucoup plus délicat.