

Les courbes de Pierre Bézier

A. Fiche élève

Monsieur Bézier était un ingénieur de Renault qui se trouva confronté à un problème mathématique lié à l'apparition des machines à commande numérique dans l'industrie au cours des années 1970.

Pour envoyer des commandes standard, il fallait que les machines puissent reproduire les formes demandées exactement comme elles leur avaient été fournies. On peut bien sûr mesurer un certain nombre de points dans l'espace et donner les coordonnées puis joindre les points avec des segments mais ce n'est pas vraiment satisfaisant quand on veut quelque chose qui ne ressemble pas à un véhicule extra-terrestre : c'est ce qu'on fait d'ailleurs dans les jeux vidéo. L'idée est donc avec un certain nombre de points de contrôle M_i de construire une courbe ne dépendant que de ces points.

Nous nous plaçons ici dans le plan, la généralisation à l'espace étant immédiate.

On appelle **courbe paramétrée** l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

1. On se donne deux points A, B ainsi que la droite (AB).

a. Donner les équations paramétriques de (AB).

b. Tracer cette droite, soit avec un tableur en la considérant comme une courbe paramétrique (c'est la même chose que dans l'espace), soit avec un logiciel de géométrie en la considérant comme un lieu de points.

Dorénavant vous travaillerez soit avec un tableur, soit avec un logiciel de géométrie.

2. Construire l'ensemble des barycentres M_1 de $\{(A, u), (B, 1-u)\}$ où u varie de 0 à 1. Quel est cet ensemble de points ?

3. On se donne un troisième point C.

a. Construire l'ensemble des barycentres M_2 de $\{(B, u), (C, 1-u)\}$ où u varie de 0 à 1. Quel est cet ensemble de points ?

b. Construire l'ensemble des barycentres P_1 de $\{(M_1, u), (M_2, 1-u)\}$ où u varie de 0 à 1.

c. Montrer que P_1 est le barycentre de $\{(A, u^2), (B, 2u(1-u)), (C, (1-u)^2)\}$.

d. Vérifiez que la somme des coefficients vaut 1.

e. Quelle est la nature de l'ensemble Γ_2 des points P_1 ?

4. On se donne un quatrième point D.

a. Construire l'ensemble des points M_3 , barycentres de $\{(C, u), (D, 1-u)\}$.

b. Construire l'ensemble des points P_2 , barycentres de $\{(M_2, u), (M_3, 1-u)\}$.

c. Construire l'ensemble Γ_2 des points Q_1 , barycentres de $\{(P_1, u), (P_2, 1-u)\}$.

d. Exprimer Q_1 comme barycentre de A, B, C et D.

e. Que vaut la somme des coefficients ? Prouvez-le.

5. Que se passe-t-il sur Γ_2 lorsqu'on déplace un point ?

6. Que peut-on dire de (AB) et de (CD) par rapport à Γ_2 ?

7. On veut faire passer une courbe exactement par les points A, B, C et D. Pensez-vous que ce soit faisable avec cette méthode ?

8. Comment généraliser à davantage de points ?

Barème : l'élève a 1 point par question pour les 4 premières questions. Le reste est pour le fun.

B. Commentaires

Si vous souhaitez aller plus loin, regardez évidemment dans Promenades, chap. Fonctions. Sinon je prépare un petit texte sur les Splines et les Nurbs qui permettent d'y voir plus clair (d'ici la fin de l'année...2007)

Pour les fichiers je suis allé au plus simple : dans le fichier Geogebra je me suis limité à 3 points, par ailleurs comme Geogebra n'a pas la commande « barycentre » j'utilise une homothétie...

Pour Excel je n'ai pris que 10 points pour le tracé, mais cela permet de voir comment continuer à rajouter des points...

L'algorithme de construction des barycentres s'appelle « algorithme de De Casteljau ».

C. Pédagogie

On touche ici à 3 domaines fondamentaux : géométrie, analyse et même probas... Les courbes de Bézier utilisent les polynômes de Bernstein qui sont la traduction de la loi Binomiale pour les fonctions (th. d'approximation de Weierstrass), voir sur la question <http://promenadesmaths.free.fr> analyse de Hilbert. On peut évidemment traiter la question avec les complexes, mais on ne gagne rien. Par contre si les élèves utilisent Maple ou Dérive, on peut le faire faire en 3D. L'intérêt pour la compréhension de ce qu'est un barycentre est évident.