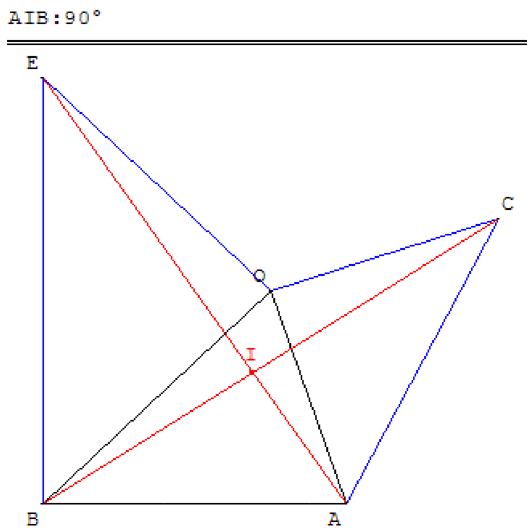
Exercices de Géométrie assistée par ordinateur

1. Triangles 1
1-a : Triangles rectangles isocèles 1
1-b : Quadrilatère de Varignon 2
1-c : La médiane de l'un est la hauteur de l'autre 3
1-d : Quadrilatère inscriptible orthodiagonal 5
1-e : Que de triangles rectangles isocèles… 5
1-f : Quatre triangles équilatéraux 6
1-g : Quatre autres triangles équilatéraux 9
1-h : Trois triangles équilatéraux 9
1-i : Quatre triangles équilatéraux autour d'un quadrilatère 9
1-j : Deux triangles équilatéraux autour d'un carré 10
1-k : Triangles de Napoléon 10
1-l : Le théorème de Morley 12
2. Carrés 15
2-a : Droites concourantes 15
2-b : Droites perpendiculaires 15
2-c : Triangle rectangle isocèle 15
2-d : Autre triangle rectangle isocèle 16
2-e : Bissectrices 16
2-f : Trois carrés : figure de Vecten (1817) 17
2-g : Trois carrés : La coiffe alsacienne 19
2-h : Quatre carrés : symédianes 19
2-i : Quatre carrés : le point de Lemoine 20
2-j : Quatre carrés : cas particulier triangle rectangle - homothéties 21
2-k : Hauteur de l'un, médiane de l'autre : triangle rectangle - calculs d'angles 21
2-l : Théorème de Neuberg 22
2-m : Quadrilatère : théorème de Von Aubel 22
2-n : Parallélogramme 23
3. Triangles isocèles 23

1. Triangles

1-a : Triangles rectangles isocèles



Thème : Construire deux triangles rectangles isocèles autour d'un triangle.

OAB est un triangle quelconque, *OAC* et *OEB* sont deux triangles rectangles isocèles directs.

1. Montrer que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires et que $AE = BC$.

- *Utilisation d'une rotation* de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
- *Utilisation du produit scalaire*

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \Rightarrow CB^2 = OB^2 + OC^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} \Rightarrow EA^2 = OA^2 + OE^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}$.

On a $OA = OC$ et $OB = OE$ et si $\alpha = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right)$, l'expression des deux produits scalaires avec normes et angle donne : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE} = OB \times OA \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Les deux produits scalaires sont égaux et $CB^2 = EA^2$ d'où les longueurs CB et EA sont égales.

Pour l'orthogonalité, calculons un autre produit scalaire :

$$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{EA} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right).\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE}\right) = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OE}$$

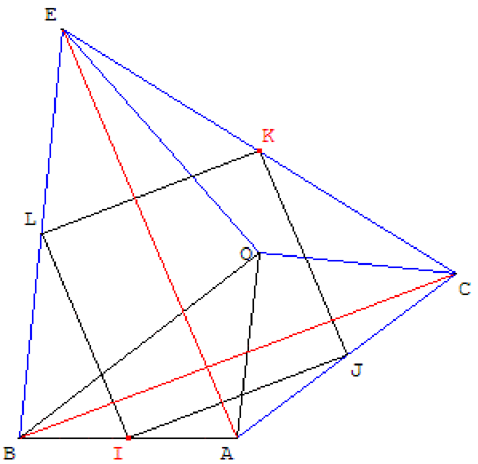
les deux dernières soustractions correspondent à des produits scalaires nuls de vecteurs orthogonaux.

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{EA} = OB \times OA \times \cos\alpha + OC \times OE \times \cos(\pi - \alpha) = 0$, les angles étant supplémentaires, les cosinus sont opposés. Le produit scalaire est nul ce qui démontre que les droites (AE) et (BC) sont perpendiculaires.

• *Utilisation des complexes en TS : choisir un repère d'origine O.*

Si A a pour affixe a et B pour affixe b, C et E ont pour affixes $c = ia$ et $e = -ib$. $\overrightarrow{EA}$ a pour affixe $e - a$, $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $b - c = i(e - a)$; $\frac{b-a}{e-a} = i$. Le quotient a pour module le module de i, soit 1, démontre l'égalité des longueurs EA et CB. L'argument de i, égal à $\frac{\pi}{2}$ permet de conclure à l'orthogonalité.

1-b : Quadrilatère de Varignon



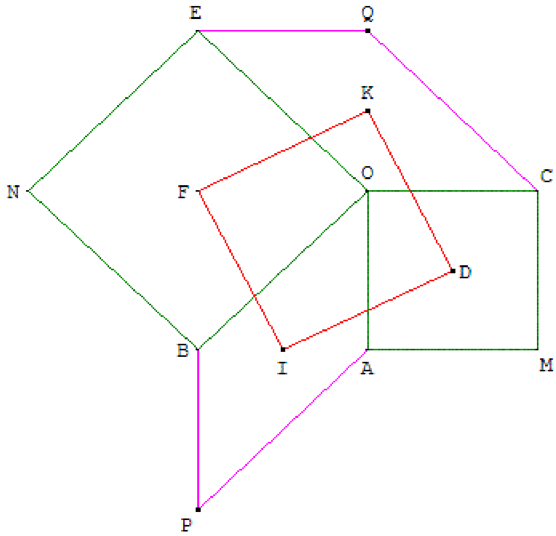
Construction de deux triangles rectangles isocèles autour d'un triangle BOA.

I, J, K et L sont les milieux de [AB], [AC], [CE] et [EB].

Montrer que $IJKL$ est un carré.

Le théorème de Varignon affirme que $IJKL$ est un parallélogramme dont les cotés sont parallèles aux diagonales [AE] et [BC] du quadrilatère $BACE$, avec $IJ = \frac{1}{2}BC$ et $IL = \frac{1}{2}AE$.

Nous avons montré dans l'exercice 1. a. que ces deux diagonales sont égales et perpendiculaires ce qui permet d'assurer que $IJKL$ est un carré. IJL est alors un triangle rectangle isocèle.

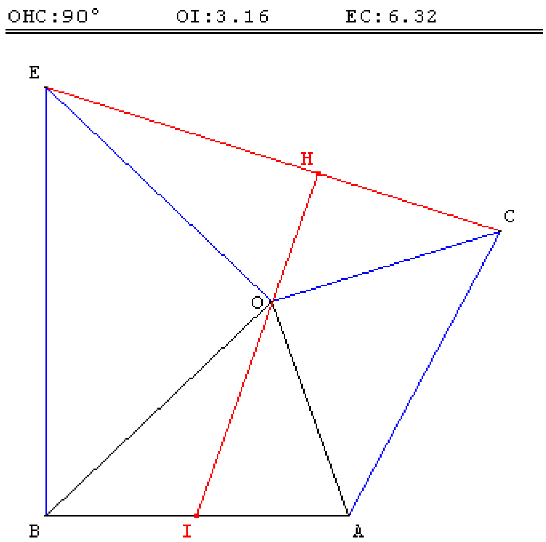


Variante : on peut considérer la configuration formée par deux carrés ayant en commun un sommet et deux parallélogrammes (voir figure ci-contre).

Montrer que les centres des carrés et parallélogrammes sont les sommets d'un carré.

Le concours EPF de 2003 propose un repère d'origine O et d'introduire les affixes des points A, C, B et E (voir : EPF 2003 ex. 3, corrigé).

1-c : La médiane de l'un est la hauteur de l'autre



OAB est un triangle quelconque, OAC et OEB sont deux triangles rectangles isocèles directs. Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que la médiane $[OI]$ de BOA est hauteur du triangle ECO et que $CE = 2OI$.

• *Utilisation d'une rotation*

Introduire le symétrique A' du point A par rapport à O.

La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme E en B, C en A' et le segment $[EC]$ en $[BA']$.

Conclure avec $[OI]$ droite des milieux du triangle ABA' (homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$!).

• *Utilisation du produit scalaire*

Le théorème de la médiane permet d'écrire : $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et on a $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}$; puis calculer le produit scalaire $2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EC}$.

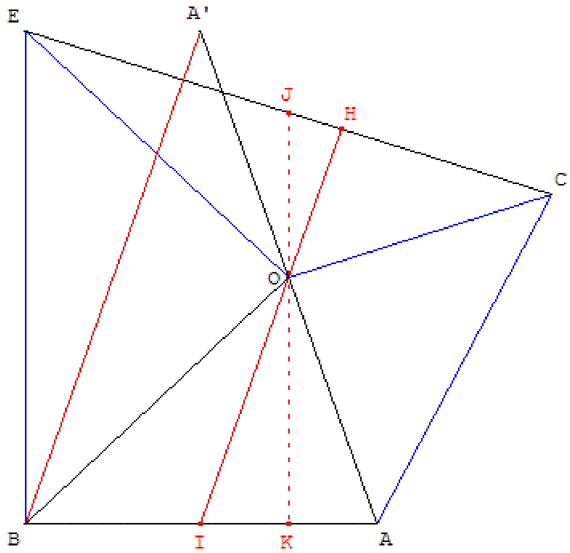
• *Utilisation des complexes*

Avec les conventions de l'exercice précédent $\overrightarrow{OI}$ a pour affixe $z = \frac{1}{2}(a+b)$ et $\overrightarrow{EC}$ a pour affixe $c-e = i(a+b)$, donc $\frac{c-e}{z} = 2i$. Ce qui permet de conclure.

Dualité 1

De même si J est le milieu de [CE], la médiane [OJ] de ECO est hauteur [OK] du triangle BOA et $AB = 2OJ$.

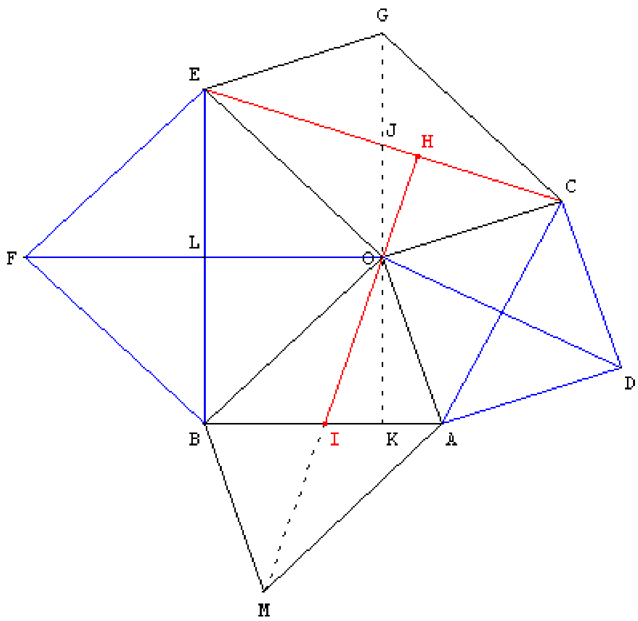
• *Utilisation d'une rotation*



Rotation de centre O : introduire le symétrique A' du point A par rapport à O. La rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme E en B, C en A' et [EC] en [BA'].

Conclure avec (OI) droite des milieux du triangle ABA' (homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$).

Dualité 2



Rotation de centre L : montrer que (OJ) est perpendiculaire à (AB).

« Doubler » les triangles en parallélogrammes et carrés de façon à utiliser l'invariance d'un carré dans la rotation d'angle 90° centrée au centre du carré.

La rotation de centre L qui transforme B en O transforme [BO] en [OE].

Les angles $\widehat{OBM}$ et $\widehat{EOC}$ sont égaux (ayant même supplémentaire $\widehat{AOB}$) et $CG = OE = OB = AM$. Donc, par la rotation, le parallélogramme *OBMA* a pour image *EOCG*, et [*BA*] a pour image [*OG*].

Dés lors $OJ = \frac{1}{2}AB$ et (*OJ*) est perpendiculaire à (*AB*).

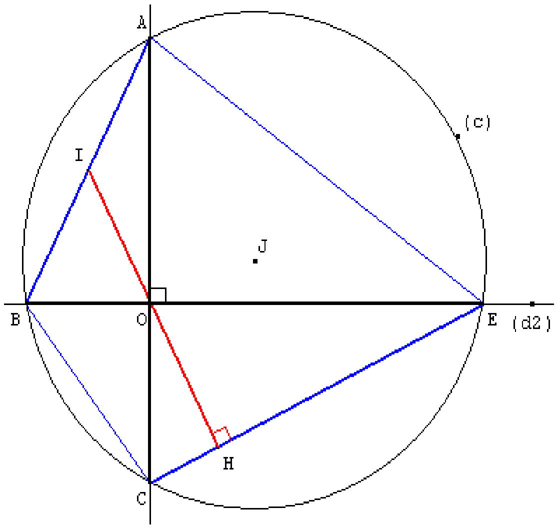
• *Remarques*

voir aussi en partie B l'exploitation des carrés ;

de cette figure on peut ne retenir que les milieux de [*BE*] et [*AC*] ;

voir au paragraphe 4. la construction des deux triangles rectangles isocèles.

1-d : Quadrilatère inscriptible orthodiagonal



Utiliser la propriété des angles inscrits dans la figure ci dessus.

Soit (C) un cercle de centre *J*, de rayon *r*. *O* un point à l'intérieur du cercle, distinct de *J*. Deux droites (d) et (d_2) orthogonales pivotent autour du point *O*.

La droite (d) coupe le cercle (C) en *A* et *C*, (d_2) coupe (C) en *B* et *E*.

Les points cocycliques *A*, *B*, *C* et *E* forment le quadrilatère orthodiagonal *ABCE*.

Soit *I* le milieu de la corde [*AB*] et *H* le projeté orthogonal de *O* sur la corde [*CE*].

Montrer, par calculs d'angles, que la médiane [*OI*] de *BOA* est hauteur du triangle *COE* : pour prouver que la hauteur (*OH*) est perpendiculaire à (*CE*), utiliser la propriété du triangle rectangle *BOA* « le milieu de l'hypoténuse est équidistant des trois sommets », d'où des triangles isocèles, puis des égalités d'angles, ..., jusqu'à conclure avec des angles complémentaires.

• *Bibliographie*

La géométrie plane au lycée - Chevrier, Dobigeon - page 140 - Irem de Poitiers, 1989

Bac S, Ex. de spécialité, Antilles, septembre 2002,

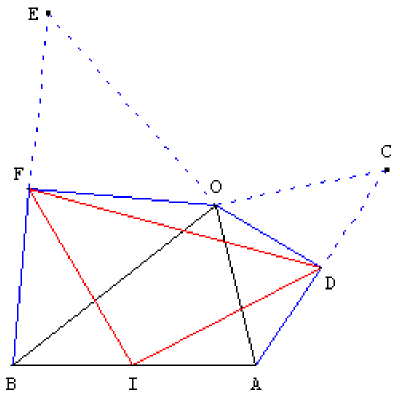
Terracher géométrie 1S - pages 88, 147 - Hachette 2001

Transmath 1S - Exercice 68 - page 352 - Nathan 2001

Henri Bareil - Plot - n° 3 - septembre 2003

1-e : Que de triangles rectangles isocèles...

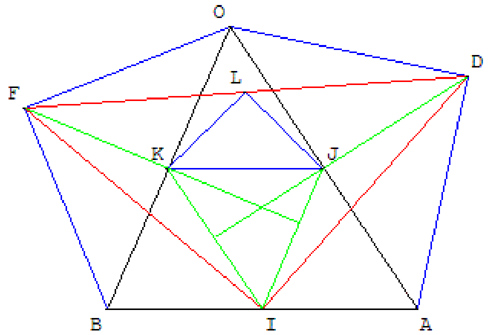
Construction de deux triangles rectangles isocèles de sommets *C* et *E* à l'extérieur du triangle *BOA*.



Soit I le milieu de $[AB]$. Montrer que $ID = IF$ (de fait IDF un est triangle rectangle isocèle).

Construire le point C symétrique de A par rapport à D, et le point E symétrique de B par rapport à F. Montrer que les triangles BOC et AOE sont isométriques. Les droites des milieux des triangles ABC et ABE déterminent des segments de longueurs égales.

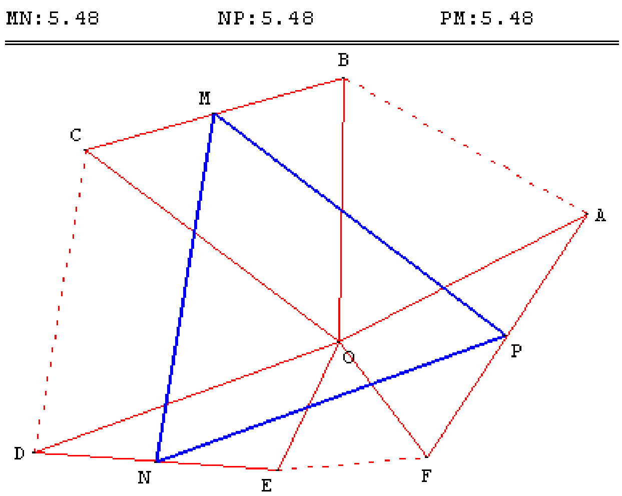
Solution avec D et F centres des carrés de côtés $[OA]$ et $[OB]$; voir 2-d : *autre triangle rectangle isocèle*.



J et K sont les milieux de $[OA]$ et $[OB]$. On construit KJL triangle direct rectangle isocèle en L.

Montrer que L est le milieu $[DF]$, que (DJ) est orthogonale à (IK) et que (FK) est orthogonale à (IJ).

1-f : Quatre triangles équilatéraux



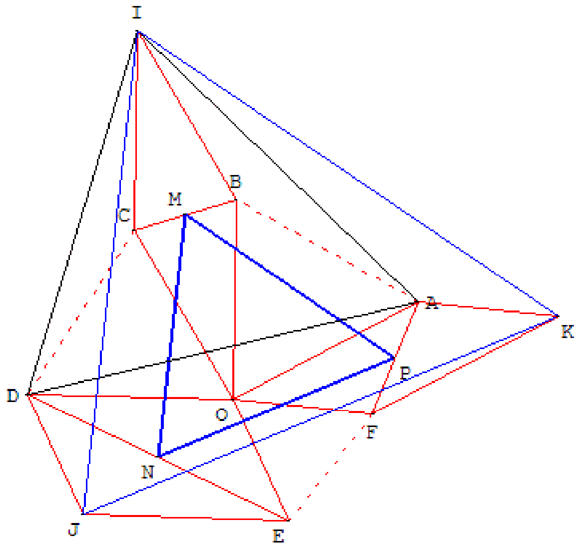
OAB, OCD et OEF sont trois triangles équilatéraux directs disjoints, sans chevauchement, n'ayant que le point O en commun.

Montrer que les milieux M, N et P des segments $[BC]$, $[DE]$ et $[AF]$ forment un triangle équilatéral.

• *Composée d'une translation et d'une rotation*

La composée d'une translation t et d'une rotation $r(0, \alpha)$, distincte de l'identité, est une rotation d'angle α : en effet c'est une isométrie directe et l'angle d'un vecteur et de son transformé est α.
Si l'image du centre O par la translation réciproque t^{-1} est le point A, la rotation composée transforme A en O, son centre I est situé sur la médiatrice de $[AO]$ (à l'intersection avec l'arc capable d'angle α).

• *Solution - Le Monde 2 août 2005*



On commence par compléter les parallélogrammes *OBIC*, *ODJE* et *OFKA* avec les points *I*, *J* et *K* symétriques de *O* par rapport à *M*, *N* et *P*.

Le triangle *OAB* est équilatéral : la rotation $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$ transforme *B* en *O*.

Le triangle *IAD* est équilatéral : en effet, *I* a pour image *D* par la succession de la transformation qui amène *B* en *O* (donc *I* en *C*) et de la rotation de $\frac{\pi}{3}$ de centre *O*.

$$\begin{array}{ccccc} & t_{\overrightarrow{IC}} & & r\left(O, \frac{\pi}{3}\right) & \\ I & \rightarrow & C & \rightarrow & D \\ B & \rightarrow & O & \rightarrow & O \end{array}$$

Cette transformation est d'ailleurs une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, et, comme elle amène *B* en *O*, c'est une rotation de centre *A*. *I* a pour image *D* dans cette rotation $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right)$: le triangle *IAD* est équilatéral. La rotation $r\left(I, \frac{\pi}{3}\right)$ transforme *D* en *A*.

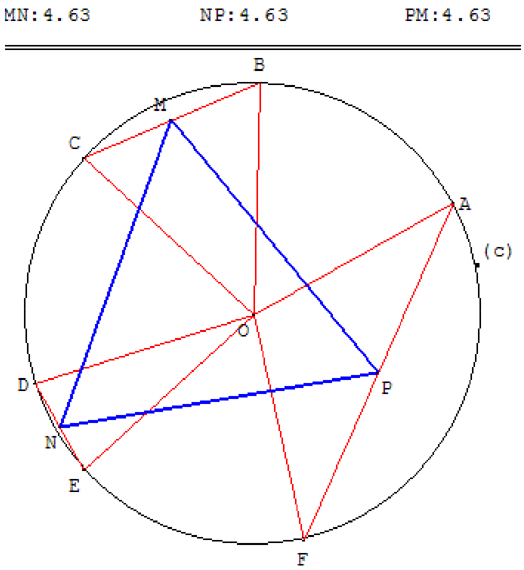
Le triangle *IJK* est équilatéral : la succession de la translation amenant *D* en *O* (et donc *J* en *E*), de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre *O* et de la translation qui amène *O* en *A* (et donc *F* en *K*) transforme *D* en *A* et *J* en *K*. Cette suite de trois transformations est donc la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ de centre *I*.

$$\begin{array}{ccccccc} & t_{\overrightarrow{DO}} & & r\left(O,\dfrac{\pi}{3}\right) & & t_{\overrightarrow{OA}} & \\ D & \rightarrow & O & \rightarrow & O & \rightarrow & A \\ J & \rightarrow & E & \rightarrow & F & \rightarrow & K \end{array}$$

J a pour image K dans cette rotation $r\left(I,\dfrac{\pi}{3}\right)$: le triangle IJK est équilatéral.

Le triangle MNP est équilatéral : comme MNP n'est rien d'autre que l'image réduite dans un rapport de $\dfrac{1}{2}$ de IJK, dans l'homothétie $h\left(O,\dfrac{1}{2}\right)$, MNP est lui aussi équilatéral.

• *Une symétrie inattendue - Affaire de logique n°439 - 26 juillet 2005*



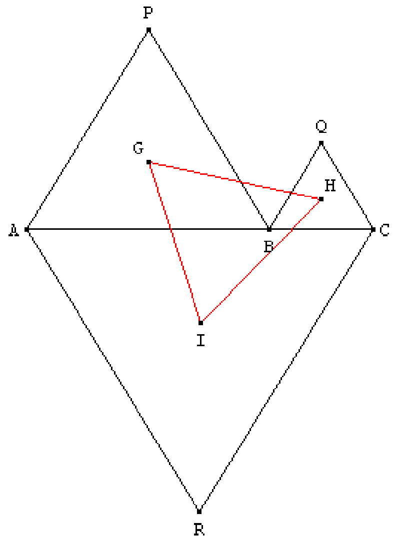
A, B, C, D, E, F sont, dans cet ordre, six points pris sur un cercle de centre O tels que les triangles OAB, OCD, OEF soient équilatéraux.

M est le milieu de $[BC]$, N celui de $[DE]$ et P celui de $[FA]$.

Le triangle MNP présente des symétries inattendues : lesquelles et pourquoi ?

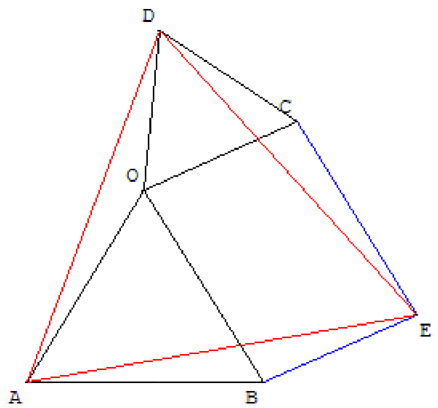
Voir Banque d'exercices 2004 n°24.

1-g : Quatre autres triangles équilatéraux



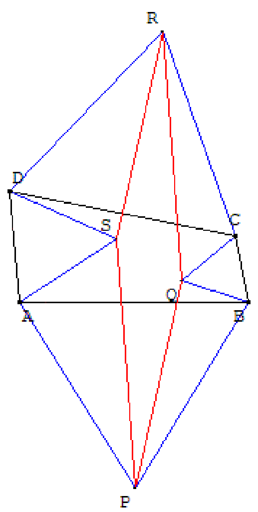
ABP, *BCQ* et *ACR* sont trois triangles équilatéraux.
Les centres de gravité *G*, *H* et *I* de ces triangles forment un triangle équilatéral *GHI*.

1-h : Trois triangles équilatéraux



Construire deux triangles équilatéraux *BOA* et *COD* ayant un sommet *O* en commun et placer le point *E* tel que *BOCE* soit un parallélogramme. Montrer que *ADE* est un triangle équilatéral.

1-i : Quatre triangles équilatéraux autour d'un quadrilatère

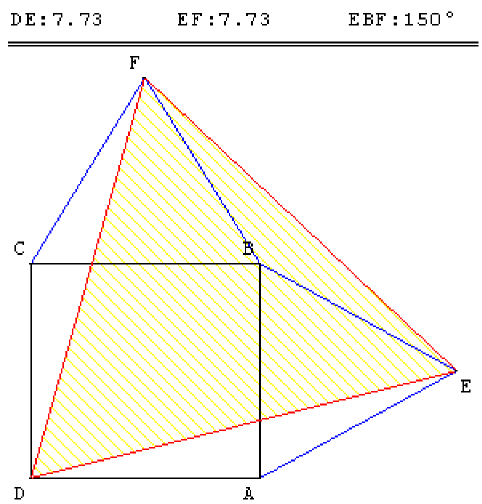


Construction de quatre triangles équilatéraux, alternativement directs (BCQ et DAS) et indirects (ABP et CDR), sur les côtés d'un quadrilatère $ABCD$.

En utilisant des rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ montrer que, en prenant pour centre A, le vecteur $\overrightarrow{PS}$ a pour image $\overrightarrow{BD}$ et que, en prenant pour centre C, le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour image $\overrightarrow{QR}$. Conclure que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$.

$PQRS$ est donc un parallélogramme, les longueurs de ses côtés sont égales aux longueurs des diagonales de $ABCD$.

1-j : Deux triangles équilatéraux autour d'un carré



Sur deux côtés consécutifs d'un carré $ABCD$, on construit extérieurement à celui-ci deux triangles équilatéraux ABE et BCF. Le triangle DEF ainsi formé est équilatéral.

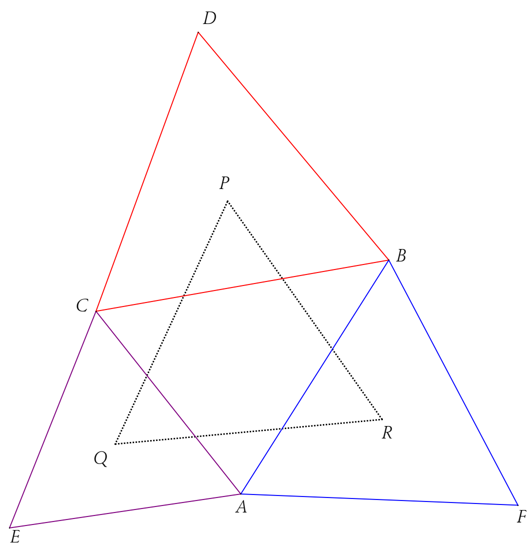
Indication : montrer que les triangles DAE et EBF sont isométriques en calculant leurs angles en A et B.

Si on construit CBF intérieurement à $ABCD$ alors D, F et E sont alignés.

1-k : Triangles de Napoléon

Ces triangles sont attribués à l'Empereur Napoléon 1er, mais il s'agit de théorèmes qui existaient déjà à son époque (Mascheroni). D'après Henri Lebesgue, Lagrange lui aurait dit : « Mon Général, nous nous attendions à tout de vous, sauf à des leçons de géométrie ».

ABC est un triangle, dont tous les angles sont inférieur à 120 °, bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux BCD, ACE et ABF ayant pour centres de gravité respectifs P, Q et R.



On peut vérifier avec GéoPlan ou tout autre logiciel de géométrie que :

1. les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité G ;

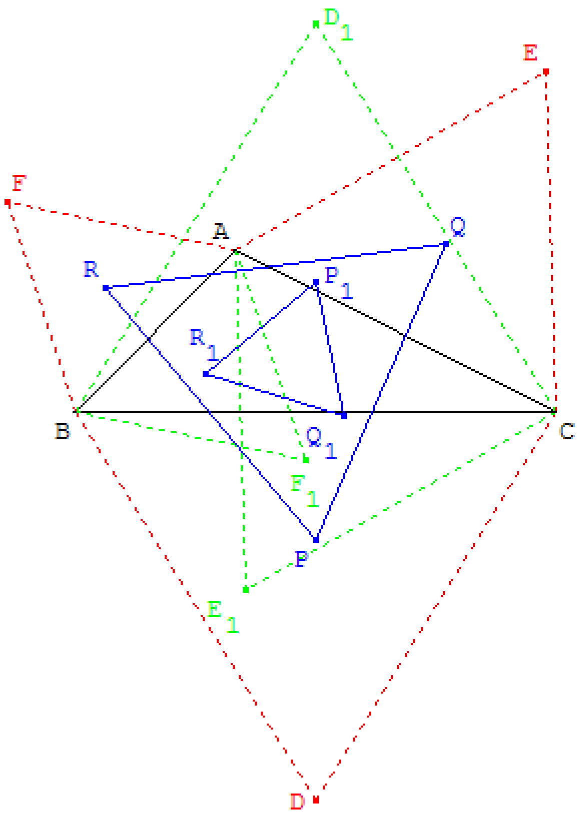
2. le triangle PQR est équilatéral (triangle extérieur de Napoléon) ;

3. Les segments $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ sont concourants en I, point de Torricelli de ABC (dit aussi point de Fermat, **X(13)** dans Kimberling) ;

4. les cercles, appelés cercles de Torricelli, circonscrits aux triangles BCD, ACE et ABF sont concourants en I (application du théorème du pivot de Forder démontré par Niquel en 1838) ;

5. le point I réalise le minimum de la somme $MA + MB + MC$ lorsque M décrit le plan (théorème de Torricelli ou de Schruttka), les segments $[IA]$, $[IB]$ et $[IC]$ forment entre eux des angles de 120°.

Triangle intérieur de Napoléon : c'est le triangle analogue $P_1Q_1R_1$ obtenu en traçant les trois triangles équilatéraux BCD_1, ACE_1 et ABF_1 du même côté que le triangle ABC par rapport aux droites (AB), (BC) et (AC). Les sommets P_1, Q_1, R_1 du triangle intérieur sont les symétriques des sommets du triangle extérieur P, Q, R par rapport aux côtés $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ de ABC.

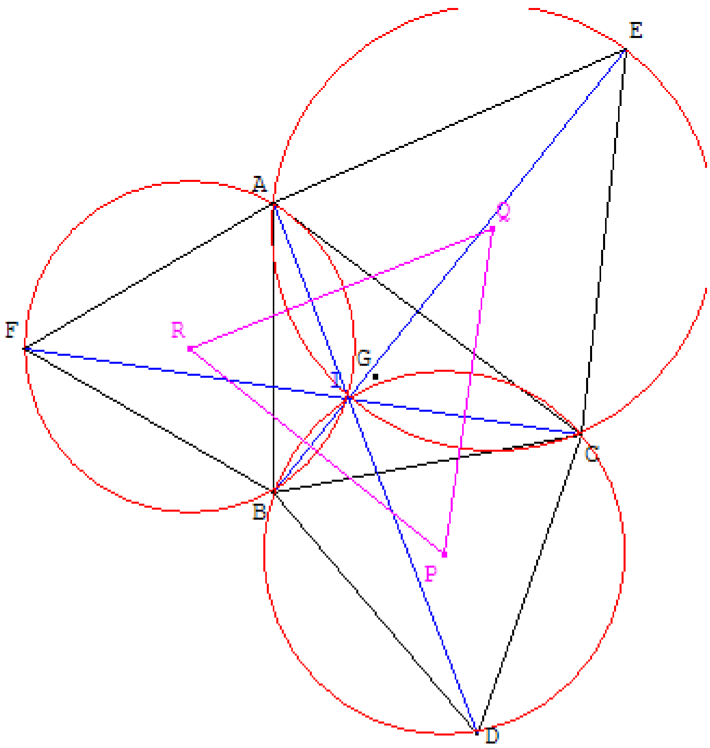


GéoPlan permet aussi de vérifier que :

6. le triangle intérieur de Napoléon est équilatéral ;

7. la différence des aires entre le triangle extérieur PQR et le triangle intérieur $P_1Q_1R_1$ est égale à l'aire du triangle ABC (démontré par Yaglom).

En géométrie contrairement à certaines propriétés numériques, avant l'informatique, il n'était pas possible d'envisager toutes les situations possibles. D'une figure ne pouvait se déduire de preuve expérimentale en raison de l'imprécision du dessin d'une part et de l'ambiguïté de tracer un cas particulier et non une configuration générale d'autre part. Il fallait faire une démonstration abstraite soit avec la méthode synthétique qui remonte à Euclide, laquelle à partir des postulats et théorèmes établis précédemment permet de déduire les propriétés cherchées, soit avec la méthode analytique, développée par Fermat et Descartes, qui ramène la démonstration à des calculs algébriques.



Les logiciels de géométrie permettent de confier à l'ordinateur les calculs algébriques et de démontrer une propriété par une figure bien faite (à la précision de l'ordinateur près) et modifiable à volonté permettant d'envisager toutes les situations possibles.

Ne pouvant faire les démonstrations mathématiques des affirmations précédentes dans le cadre de ce document, nous nous contenterons de la « preuve par la figure » : lancer le logiciel, déplacer les points *A*, *B* ou *C* et conclure.

En classe de terminale S, la démonstration se fera en utilisant les nombres complexes. Une résolution à l'aide de rotations est plus délicate : elle suppose l'intervention d'une composée de rotations, notion peu familière pour la plupart des élèves mais néanmoins accessible moyennant une simplification des calculs.

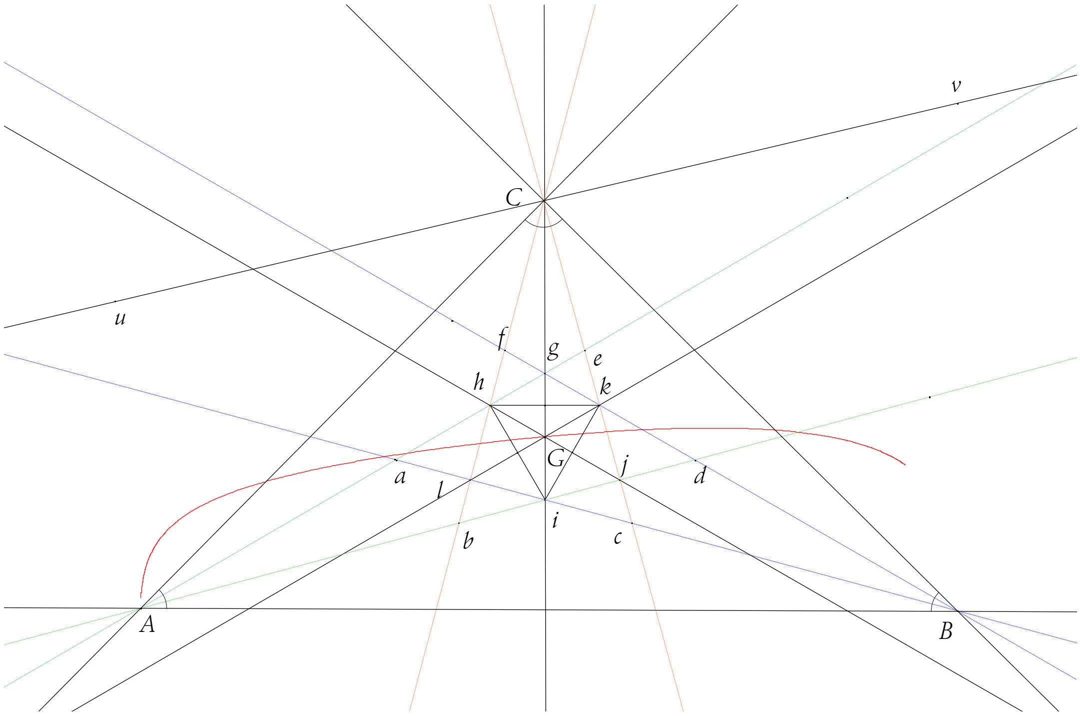
• *Voir* http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS/exercices_geometrie.zip ainsi que http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/TS/exercices_geometrie_specialite.zip

1-l : Le théorème de Morley

On termine cette exploration des triangles avec un théorème beaucoup plus tardif :

En 1898 le mathématicien Franck Morley découvre un théorème de géométrie élémentaire que les Grecs n'avaient pas trouvé, chose remarquable en soi… mais c'est dû au fait qu'ils ne voulaient pas trissecter un angle autrement qu'à la règle et au compas.

Dans un triangle *ABC*, on considère les trissectrices de chaque angle ; elles se coupent alors en plusieurs points dont trois forment un triangle équilatéral.



En l'occurrence il s'agit des droites (Ai), (Bi) puis (Bk) et (Ck) enfin (Ch) et (Ah).

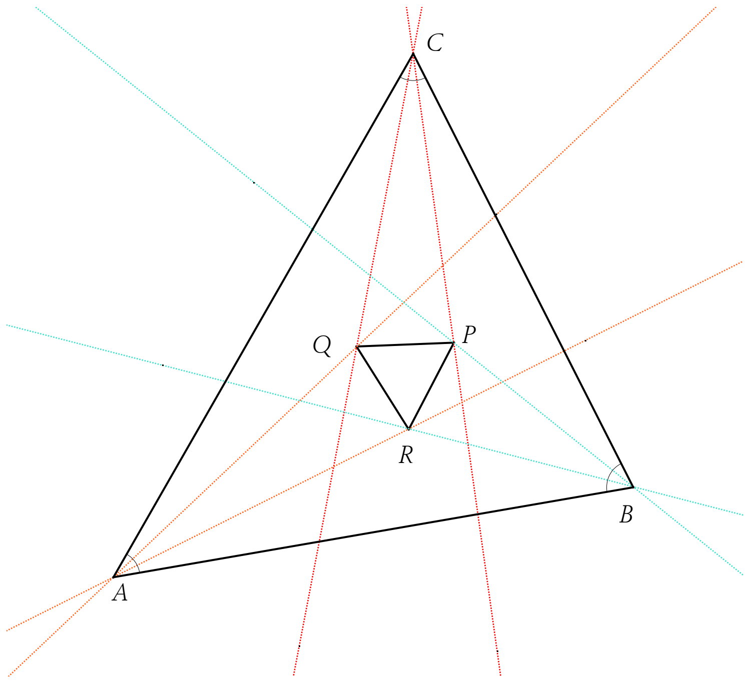
Franck Morley avait alors lancé une sorte de concours, demandant la solution la plus élémentaire : celle-ci peut se faire de plusieurs manières : voir par exemple C. Tisseron, *Géométries affine, projective et euclidienne*, p. 294 (Hermann, 1983) ainsi que le site

http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoPlane/Classiques/Morley/Morley1.htm

ou encore http://www.cut-the-knot.com/triangle/Morley/Morley.shtml

Sur la figure vous voyez la construction ainsi que le lieu des centres de gravité des triangles équilatéraux (ihk) lorsque C parcourt la droite (uv).

Nous faisons une démonstration assez simple et réalisable en 1ère S :



Soit les angles $a=\frac{1}{3}\widehat{BAC}$, $b=\frac{1}{3}\widehat{ABC}$, $c=\frac{1}{3}\widehat{ACB}$, on a évidemment

$$a+b+c=\frac{1}{3}\left(\widehat{BAC}+\widehat{ABC}+\widehat{ACB}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Prenons le cercle circonscrit à ABC de rayon 1, de sorte que $\begin{cases} AB=2\sin(3c) \\ BC=2\sin(3a) \\ CA=2\sin(3b) \end{cases}$.

Dans le triangle BPC, d'après la loi des Sinus, on a : $\frac{BP}{\sin c}=\frac{BC}{\sin(\pi-b-c)}=\frac{2\sin(3a)}{\sin(b+c)}=\frac{2\sin(3a)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)}$ d'où $BP=\frac{2\sin c\sin(3a)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)}$. Si on utilise la formule d'addition des sinus on a $\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a-\frac{1}{2}\sin a$; multiplions par $\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a+\frac{1}{2}\sin a$, nous avons alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)=\frac{3}{4}\cos^2 a-\frac{1}{4}\sin^2 a=\frac{3}{4}\left(1-\sin^2 a\right)-\frac{1}{4}\sin^2 a=\frac{3}{4}-\sin^2 a=\frac{1}{4}\left(3-4\sin^2 a\right).$$

Or $\sin(3a)=3\sin a-4\sin^3 a=\sin a\left(3-4\sin^2 a\right)$ d'où en simplifiant : $\frac{\sin 3a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)}=4\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)$ et $BP=8\sin c\sin a\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)$.

La même opération dans le triangle BRA donne évidemment $BR=8\sin a\sin c\sin\left(\frac{\pi}{3}+c\right)$. La formule d'Al-Kashi dans BPR donne

$$\begin{aligned} PR^2 &= BP^2+BR^2-2BP.BR\cos b \\ &= 64\left[\sin^2 c\sin^2 a\right]\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+a\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+c\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+c\right)\cos b\right]. \end{aligned}$$

Comme l'objectif est de montrer que $PR = RQ = QP$, il faut que les formules soient semblables pour les trois après permutation circulaire, et pour cela que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+a\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+c\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+c\right)\cos b=\sin^2 b.$$

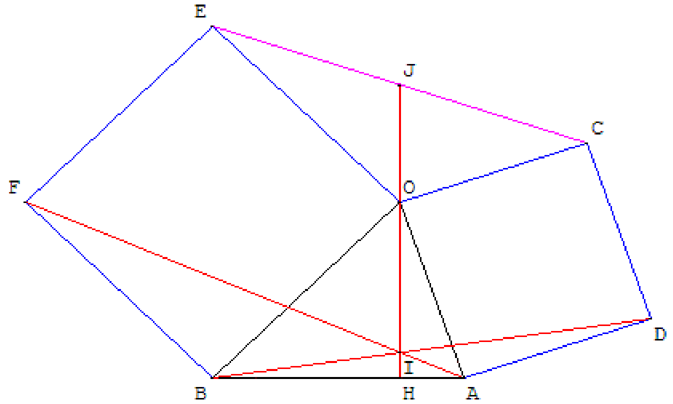
Or $\left(\frac{\pi}{3}+a\right)+\left(\frac{\pi}{3}+c\right)+b=\frac{2\pi}{3}+a+c+b=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$ et en prenant un triangle convenable ayant les trois angles, on obtient bien le résultat demandé grâce à Al-Kashi.

• *Voir également une démonstration avec les complexes :* http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Morley

• *Pour aller un peu plus loin* : http://promenadesmaths.free.fr/theoreme_de_Morley.htm

2. Carrés

2-a : Droites concourantes



Construction de deux carrés *OADC* et *OEFB* à l'extérieur du triangle *BOA*.

Les droites (*BD*) et (*AF*) sont concourantes en *I* situé sur une hauteur de *BOA* qui est aussi médiane de *OCE*.

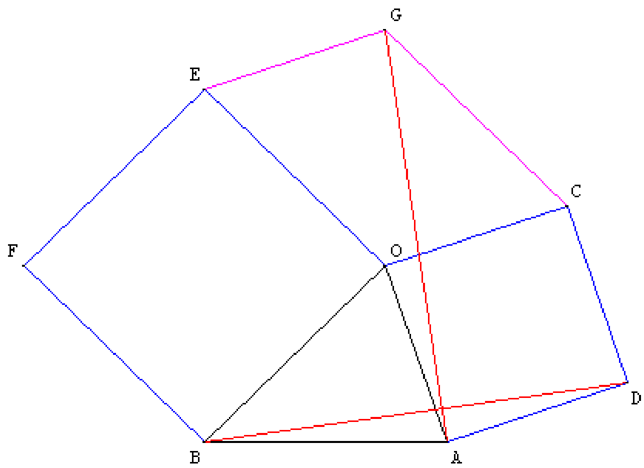
Autre formulation avec des triangles rectangles isocèles :

OAB est un triangle quelconque, *OAD* et *OFB* sont deux triangles rectangles isocèles directs.

Le point *I* est l'intersection des droites (*BD*) et (*AF*). Montrer que (*OI*) est orthogonale à (*AB*).

• *Voir* : Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée - brochure 150 - APMEP 2003.

2-b : Droites perpendiculaires

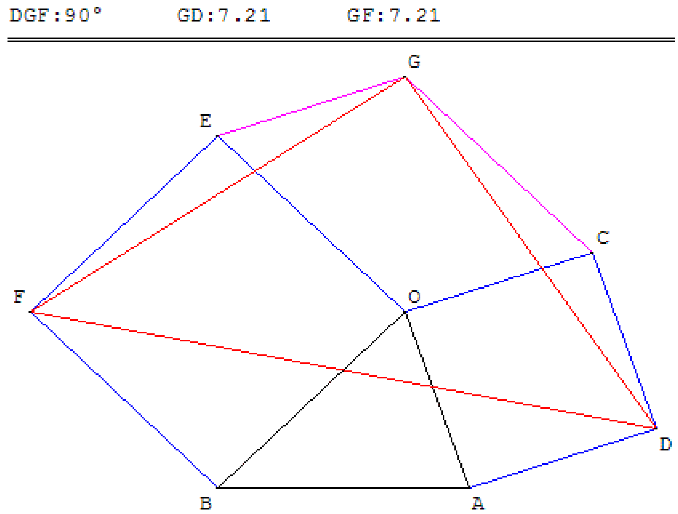


Construction de deux carrés *OADC* et *OEFB* à l'extérieur du triangle *BOA*.

Le point *G* complète le parallélogramme *EOCG*.

Montrer que les droites (*AG*) et (*BD*) sont perpendiculaires, de même que (*AF*) et (*BG*).

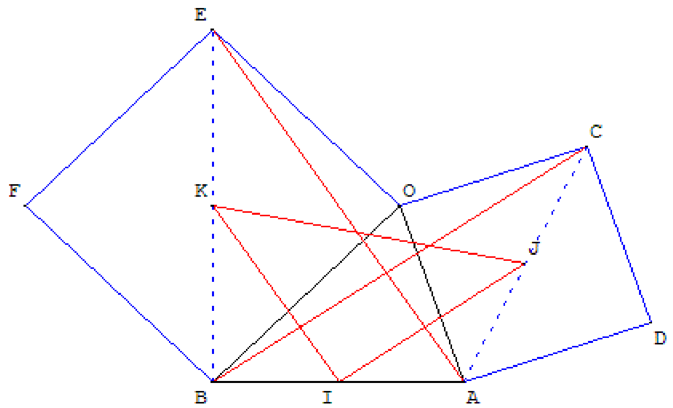
2-c : Triangle rectangle isocèle



Construction de deux carrés *OADC* et *OEFB* à l'extérieur du triangle *BOA*.
Le point *G* complète le parallélogramme *EOCG*. Montrer que le triangle *DFG* est rectangle isocèle.

2-d : Autre triangle rectangle isocèle

Classe de seconde

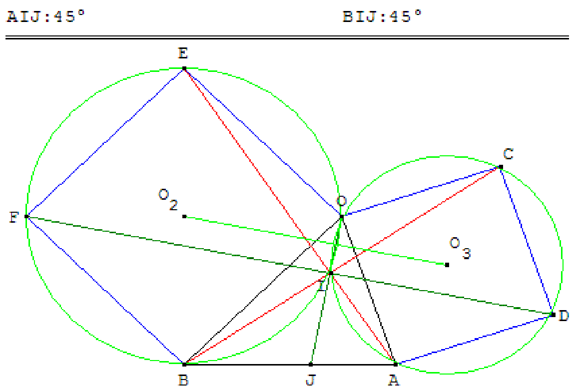


I est le milieu de [*AB*], *J* et *K* les centres des carrés. Le triangle *IJK* est rectangle isocèle.

En effet la rotation de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme *E* en *B*, *A* en *C*, donc [*AE*] en [*BC*] qui sont alors de longueurs égales et orthogonaux.

Il en est de même pour [*IK*] et [*IJ*], segments des droites des milieux des triangles *AEB* et *BAC*, respectivement parallèles aux segments précédents et de longueurs moitiés.

2-e : Bissectrices



Construction de deux carrés *OADC* et *OEFB* à l'extérieur du triangle *BOA*.

Les droites (BC), (AE) et (DF) sont concourantes en I. On a démontré, partie A, que les droites (BC) et (AE) sont perpendiculaires.

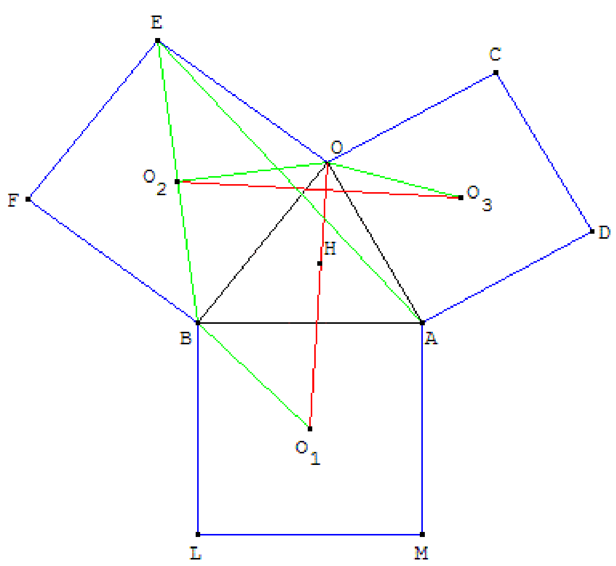
On montre que les droites (OI) et (DF) le sont aussi : ce sont les bissectrices des droites (BC) et (AE) et réciproquement.

Les angles aigus formés par ces droites sont égaux à $\frac{\pi}{4}$.

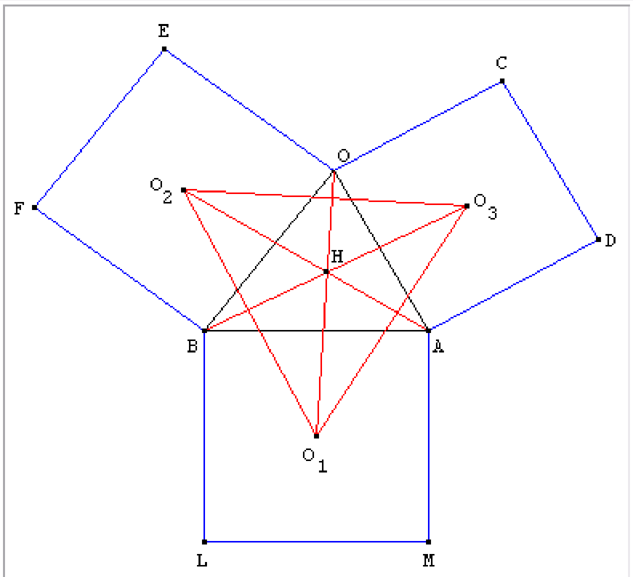
La démonstration se fait en remarquant que I est le deuxième point d'intersection des deux cercles C_2 et C_3 circonscrits aux carrés puis en étudiant les angles inscrits dans ces cercles : les angles $\widehat{OID}$ et $\widehat{OIF}$, interceptant des demi-cercles, sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ et les angles aigus en I, interceptant des quarts de cercles, sont égaux à $\frac{\pi}{4}$. O_2 et O_3 étant les centres des cercles C_2 et C_3, la droite (O_2O_3) est parallèle à (DF) et est perpendiculaire à (OI).

2-f : Trois carrés : figure de Vecten (1817)

Construction de trois carrés $OADC$, $OEFB$ et $ABLM$ à l'extérieur du triangle BOA.



Les segments [OO_1] et [O_2O_3] sont de même longueur et orthogonaux.



Les hauteurs du triangle $O_1O_2O_3$ sont les droites (OO_1), (AO_2) et (BO_3).

H, orthocentre de $O_1O_2O_3$, est le *point de Vecten* du triangle BOA.

En examinant la figure ci-dessus à gauche, on voit que la similitude $S\left(B, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ transforme le triangle OBO_1 en EBA et la similitude $S\left(O, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ transforme le triangle O_3BO_2 en AOE. En composant la similitude de centre B suivie de la réciproque de la similitude de centre O on a :

$$\begin{array}{ccccc} & S\left(B, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) & & S\left(O, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right) & \\ O & \rightarrow & E & \rightarrow & O_2 \\ O_1 & \rightarrow & A & \rightarrow & O_3 \end{array}$$

La composée de ces deux similitudes est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, [OO_1] et [O_2O_3] sont de même longueur et orthogonaux.

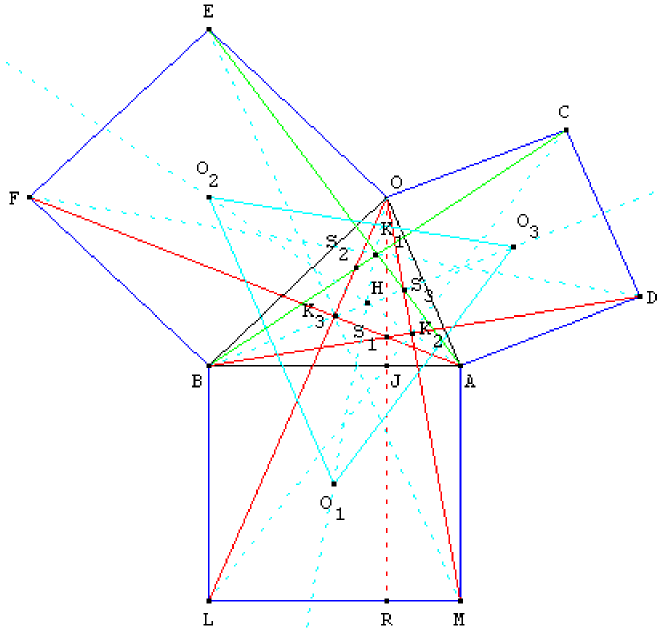
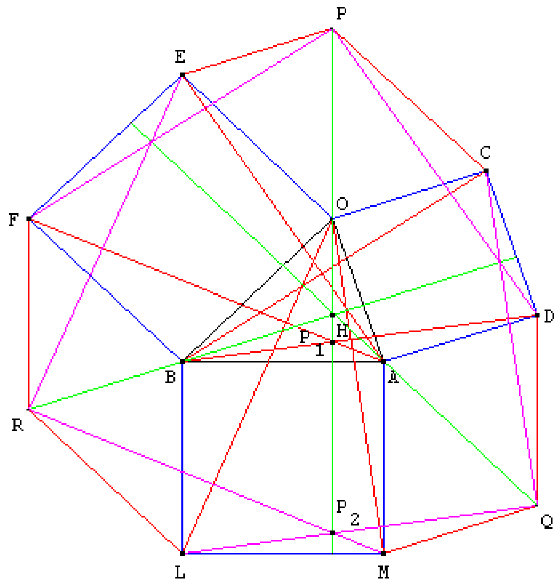


Figure 3 : Les droites (AF) et (BD) sont orthogonales à (OL) et (OM). Elles se coupent en S_1 situé sur la hauteur (OJ) du triangle BOA. Soit O_1 le centre du carré $ABLM$.

Nous avons montré dans la figure précédente que les droites (AE), (BC) et (FD) sont concourantes en K_1 et que ces droites avec la droite (OK_1) formaient des angles aigus de $\frac{\pi}{4}$.

Nous trouvons ici que K_1 est situé sur la droite (OO_1).



Même raisonnements avec les deux autres carrés : (OS_1), (AS_2) et (BS_3) sont les hauteurs du triangle BOA.

Le triangle $O_1O_2O_3$ a ses côtés parallèles aux droites (EM), (CL) et (DF). Ses hauteurs sont les droites (OO_1), (AO_2) et (BO_3) ; H, orthocentre de $O_1O_2O_3$, est le *point de Vecten* du triangle BOA.

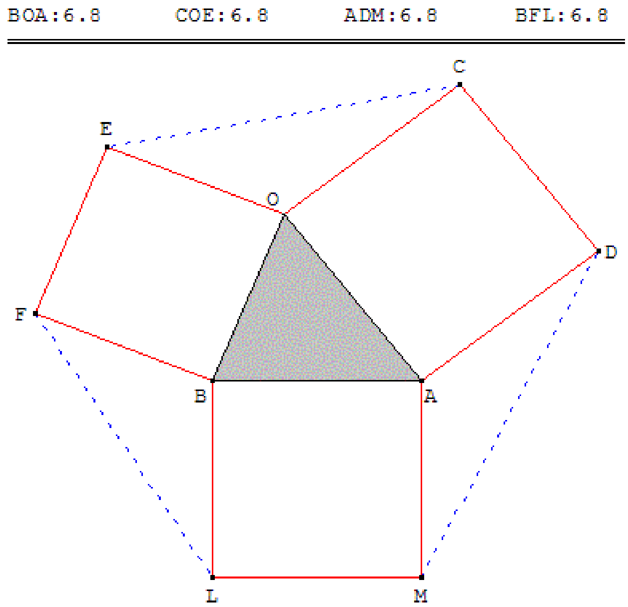
Figure 4 : Compléter avec les points P, Q et R en construisant les parallélogrammes $COEP$, $DAMP$ et $FBLR$.

Les droites (OP), (AQ) et (BR) sont les hauteurs de BOA.

La hauteur (OP) contient le point P_1 intersection de (AF) et (BD), de même (OP) contient le point P_2 intersection de (LQ) et (MR).

• *Voir* Points de Vecten = **X(485)** et **X(486)** dans Kimberling

2-g : Trois carrés : La coiffe alsacienne



Affaire de logique n°129 - 13 et 20 juillet 1999

Prenez un triangle quelconque (en gris) et tracez à l'extérieur les trois carrés construits à partir des trois côtés du triangle. Vous obtiendrez une coiffe alsacienne. En joignant les extrémités libres des carrés à l'aide de pointillés, vous matérialisez trois nouveaux triangles.

Comparez l'aire de chacun de ces trois triangles à celle du triangle gris.

Solution

Chacun des trois triangles a la même aire que le triangle gris.

Pour le montrer sur le triangle *DAM* par exemple, il suffit d'opérer une rotation de $\frac{\pi}{2}$ du triangle autour de son sommet *A*. La base *AM* vient dans le prolongement de *BA*, avec la même longueur.

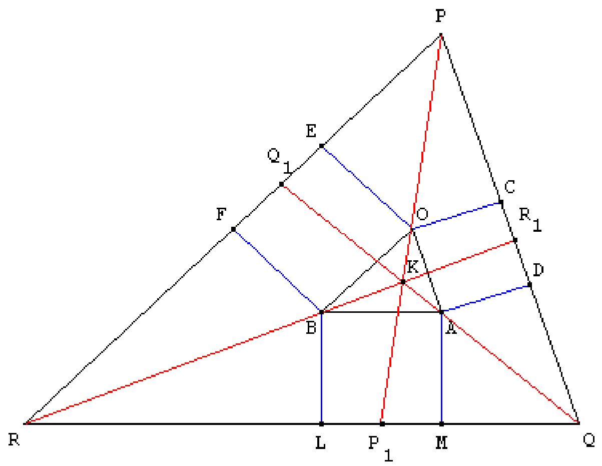
Le point *D* vient coïncider avec *O*, ce qui entraîne que la hauteur issue de *O* dans le triangle *DAM* a la même longueur que celle issue de *O* dans le triangle *BOA*.

Les triangles *BOA* et *DAM* ayant même base et même hauteur, ont même aire.

• *Élisabeth Busser et Gilles Cohen copyright POLE 1999.*

2-h : Quatre carrés : symédianes

Définition : la symédiane en *O* du triangle *BOA* est la droite (d) telle que la droite (d) et la médiane issue de *O* ont pour bissectrice la bissectrice de $\widehat{BOA}$.



Les droites (CD) et (EF) se coupent en P, (CD) et (ML) se coupent en Q, (EF) et (ML) se coupent en R.

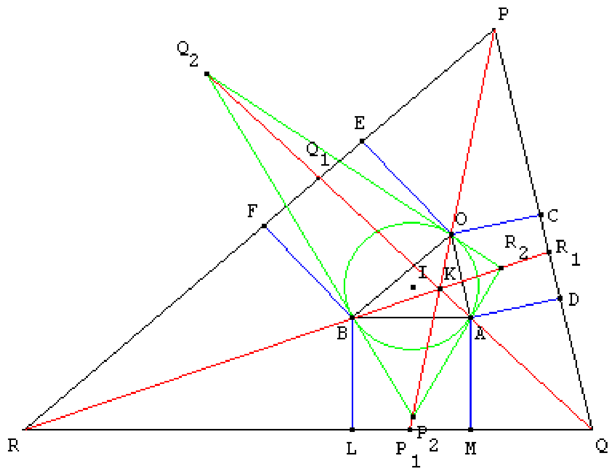
Symédiane (OP) en O du triangle BOA : soit J le centre du cercle inscrit dans BOA et C' le milieu de [AB].

La médiane (OC') et la symédiane (OP) ont pour bissectrice (OJ) : les couples de droites {(OP), (OC')} et {(OA), (OB)} ont même bissectrice.

Les droites (OP), (AQ) et (BR) sont les symédianes du triangle BOA. Leur point d'intersection K est le point de Lemoine du triangle.

Les tangentes au cercle circonscrit, menées à partir des sommets d'un triangle, se coupent sur les symédianes de ce triangle.

2-i : Quatre carrés : le point de Lemoine



Les trois symédianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est le point de Lemoine ou point symédian du triangle.

Les distances de ce point aux trois côtés du triangle sont proportionnelles à ses côtés.

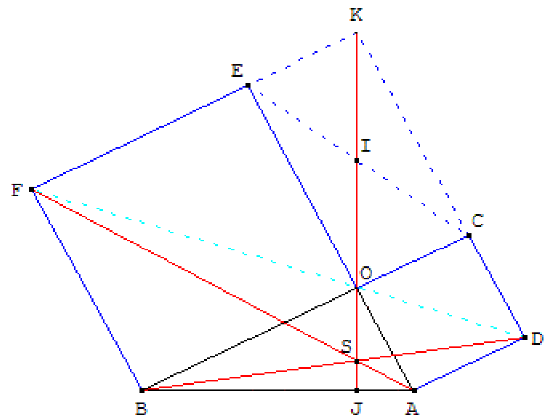
Le point de Lemoine du triangle BOA, de côtés $a = OA$, $b = OB$ et $c = AB$ est le barycentre du système pondéré (A, b^2) ; (B, a^2) ; (O, c^2).

Le point de Lemoine (**X(6)** dans Kimberling) est le point dont la somme des carrés des distances aux côtés du triangle est minimale.

• *Démonstrations* Yvonne et René Sortais - La géométrie du triangle - Hermann 1997,

http://passerelle.u-bourgogne.fr/publications/webeuclide/

2-j : Quatre carrés : cas particulier triangle rectangle - homothéties



Construction de deux carrés *OADC* et *OEFB* à l'extérieur du triangle *BOA* rectangle en *O*.

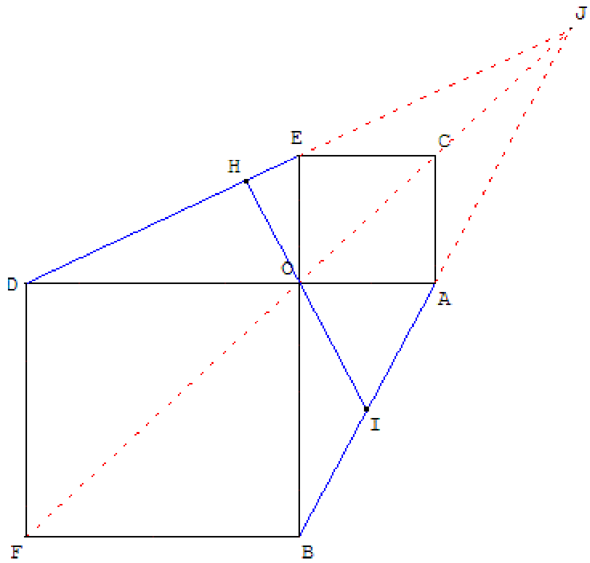
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (*OK*), (*AF*) et (*BD*) sont concourantes. Pour cela on appelle *S* l'intersection de (*AF*) et (*BD*) et on définit :

h_1 : l'homothétie de centre *S* qui transforme *D* en *B*,

h_2 : l'homothétie de centre *S* qui transforme *F* en *A*.

On utilise le fait que l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle et que la composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de même centre. La médiane [*OI*] de *COE* est hauteur du triangle *BOA*.

2-k : Hauteur de l'un, médiane de l'autre : triangle rectangle - calculs d'angles



• *Classe de seconde*

OACE et *ODFD* sont deux carrés de sens direct ayant uniquement le sommet *O* en commun et aux côtés parallèles. Les droites (*AB*) et (*DE*) se coupent en *J*.

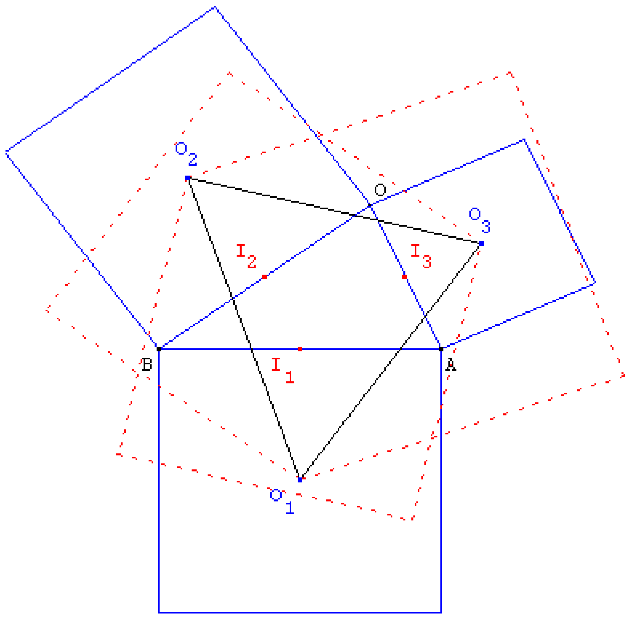
Les points *J*, *C*, *O* et *F* sont alignés. La médiane [*OI*] de *BOA* est hauteur du triangle *DOE*.

• *Indication*

Pour montrer que la hauteur (*OH*) est perpendiculaire à (*DE*), utiliser la propriété du triangle rectangle vue au collège « le milieu de l'hypoténuse est équidistant des trois sommets », d'où des triangles isocèles, puis des égalités d'angles, ..., jusqu'à conclure avec des angles complémentaires.

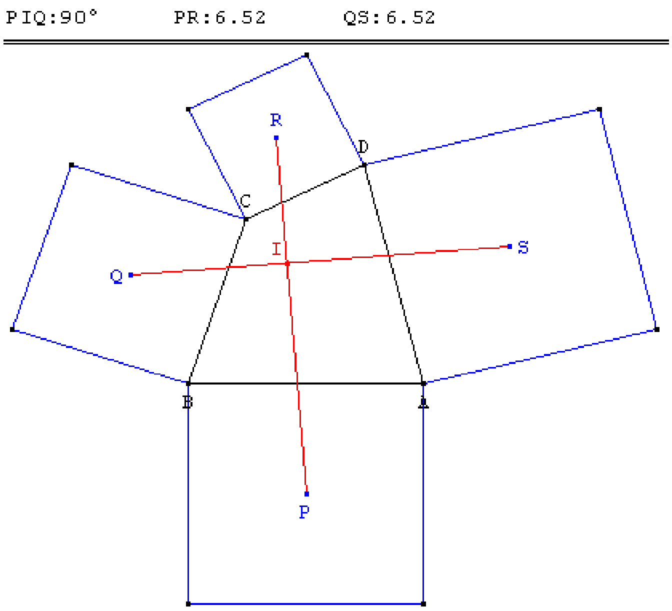
• *Utilisation d'une similitude, voir : transformations au bac*

2-l : Théorème de Neuberg



O_1, O_2, O_3 sont les centres des trois carrés construits à l'extérieur du triangle BOA.
I_1, I_2, I_3 sont les centres des trois carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle $O_1O_2O_3$.
Montrer que I_1, I_2 et I_3 sont les milieux des côtés du triangle BOA.

2-m : Quadrilatère : théorème de Von Aubel



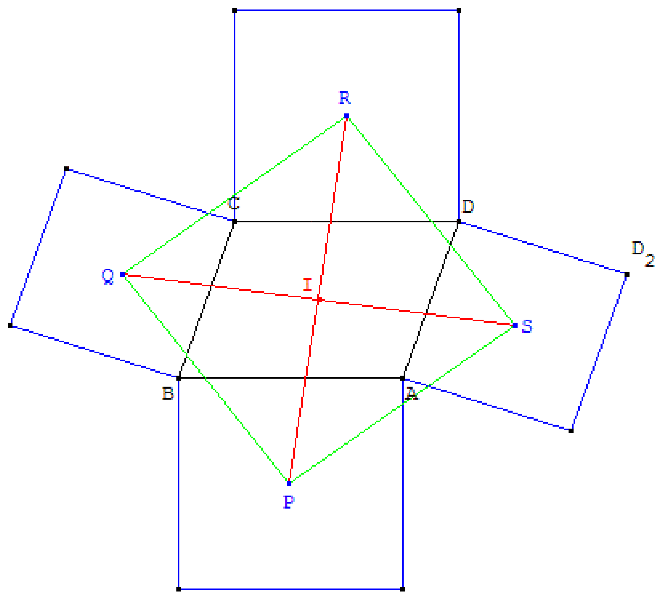
Construction de quatre carrés à l'extérieur d'un quadrilatère convexe $ABCD$.

• *Théorème de Von Aubel* : les segments $[PR]$ et $[QS]$, qui joignent les centres des carrés opposés, sont orthogonaux et de même longueur.

• *Bibliographie* : Géométrie pour le CAPES - Yves Ladegaillerie - Ellipses 2003

http://passerelle.u-bourgogne.fr/publications/webeuclide/

2-n : Parallélogramme



Construction de quatre carrés à l'extérieur d'un parallélogramme *ABCD*.
Le quadrilatère *PQRS* formé par les centres des carrés est un carré.

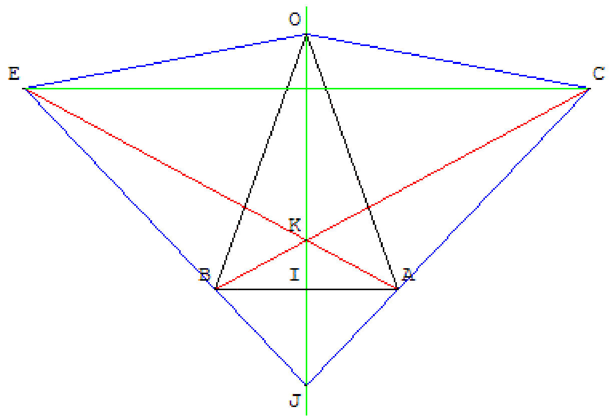
En effet la rotation de centre *R* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme *C* en *D*, *B* en D_2, le carré de côté [*CB*] a pour image le carré de côté [*DA*]. Donc *Q* a pour image *S*, soit $RQ = RS$ et l'angle $\widehat{QRS}$ est droit. *QRS* est un triangle rectangle isocèle.

De même par la rotation de centre *P* et d'angle $\frac{\pi}{2}$ le carré de côté [*DA*] a pour image le carré de côté [*CB*].

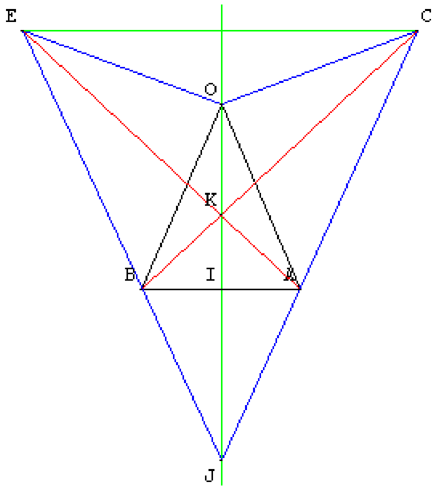
Donc *S* a pour image *Q* ; $PS = PQ$ et *QPS* est rectangle isocèle.
PQRS a ses quatre angles droits et des côtés consécutifs égaux : c'est un carré.

3. Triangles isocèles

Construction de deux triangles équilatéraux *OAC* et *OEB* à l'extérieur du triangle *BOA*.



Autour d'un triangle isocèle *BOA*, construction de deux triangles isométriques *OAC* et *OEB* à l'extérieur du triangle *BOA*.



Construction de deux triangles rectangles isocèles *OAC* et *OEB* à l'extérieur du triangle *BOA*.
I est le milieu de [AB], J l'intersection de (AC) et (BE), K l'intersection de (BC) et (AE).
Montrer que les points O, I, K, J sont alignés, que la droite (CE) est parallèle à (AB).

• *Bibliographie* La géométrie plane au lycée - Chevrier, Dobigeon - Irem de Poitiers, 1989.
Exercices dans de nombreux manuels scolaires.