Approximation d’une fonction par des polynômes

L’objectif du TP est la recherche de polynômes P_n de degré n qui permettent d’obtenir une approximation de la fonction f définie sur] –0,5 ; 0,5 [par $f(x) = \ln(1+x)$ au voisinage de zéro.

On appelle (C) la courbe d’équation $y = \ln(1+x)$.

On appelle (C_0), (C_1), (C_2),…, (C_n) les courbes d’équation $y = P_n(x)$ où P_n est le polynôme de degré n obtenu.

Tracé de la courbe (C) :

Sur votre calculatrice ou à l’aide d’un tableur, tracer la courbe (C) dans une fenêtre définie par $x \in [-0,5 ; 0,5]$ et $y \in [-0,5 ; 0,5]$.
Sur votre feuille, donner l’allure de la courbe (C).

Polynôme P_0 :

1. Quelle condition doit vérifier P_0 pour que les courbes (C) et (C_0) coïncident en O ?
2. En déduire P_0 et tracer sur votre calculatrice ou à l’aide d’un tableur (C_0).

$P_0(x)$ = ………….……..

Polynôme P_1 :

On cherche des réels a_0 et a_1 tels que $P_1(x) = a_0 + a_1 x$.
1. Quelles conditions doit vérifier P_1 pour que les courbes (C) et (C_1) « coïncident au mieux » ? En déduire les valeurs de a_0 et a_1 puis le polynôme P_1.
2. Tracer (C_1).

$P_1(x)$ = …………..……..

3. Quelle est l’erreur maximale commise en remplaçant ln(1+x) par $P_1(x)$ sur l’intervalle $[-0,5 ; 0,5]$? *(on pourra utiliser le tableau donné en annexe).*

Polynôme P_2 :

On cherche le polynôme $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
1. En utilisant les conditions imposées à P_1, déterminer a_0 et a_1.
2. Peut-on déterminer le signe de a_2 graphiquement ?

3. A l’aide de votre calculatrice ou à l’aide d’un tableur, déterminer la valeur de a_2 qui paraît le mieux convenir pour que les courbes (C) et (C_2) coïncident au mieux au voisinage de zéro. Quelle valeur de a_2 obtient-on ?
4. Tracer (C_2).

$P_2(x)$ = ……………….……..

5. Quelle est l’erreur maximale commise en remplaçant ln(1+x) par $P_2(x)$ sur l’intervalle $[-0,5 ; 0,5]$?

Polynômes P_3, P_4, P_5 :
1. En poursuivant la démarche amorcée dans les questions précédentes, déterminer des polynômes P_3, P_4, P_5 et tracer les courbes correspondantes.

$P_3(x)$ = …………………..…..

$P_4(x)$ = ………………..……..

$P_5(x)$ = ………………….…..

2. Quelle est l'erreur maximale commise en confondant $\ln(1+x)$ avec $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$ sur l'intervalle $[-0{,}5\ ;\ 0{,}5]$?

<u>Preuves :</u>

1. Montrer que pour tout x différent de -1 : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dfrac{x^4}{1+x}$.

2. En déduire que pour tout x positif : $0 \leq \dfrac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 + x^3 \leq x^4$, puis en déduire un encadrement de $\ln(1+x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x tel que $0 \leq x \leq 5.10^{-2}$, l'encadrement obtenu est d'amplitude inférieure à 7.10^{-8}.

4. En déduire un encadrement d'amplitude inférieure à 7.10^{-8} de $\ln(\dfrac{25}{24})$. Que propose la calculatrice ?

Annexe

<u>Qualité des approximations obtenues :</u>

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
− 0,5				
− 0,4				
−0,3				
− 0,2				
…..				

Commentaires :

La première partie, à part la recherche de P_0 et P_1, utilise la calculatrice ou le tableur uniquement comme un outil de conjecture. L'élève réalise une expérience et il n'obtient pas nécessairement le « bon » polynôme. Je n'ai pas de meilleure expression que « coïncider au mieux » pour décrire le polynôme attendu.

Cette première partie permet de donner du sens à la deuxième partie : les polynômes proposés ne sont pas tirés complètement du chapeau.

L'approximation demandée à la fin permet de réfléchir à la précision des résultats proposés par une calculatrice.

Barème : 2 points pour la partie conjecture (1 point pour P_0 et P_1), 2 points pour la partie preuve.