Travaux pratiques Informatique

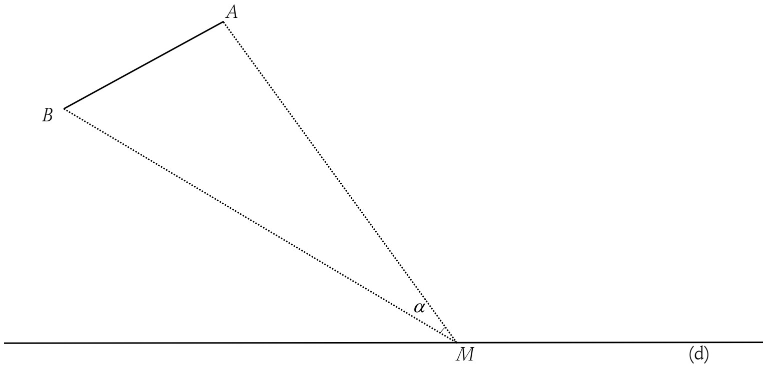
1. Problèmes de Géométrie 2
  1-1 : Angle maximum 2
  1-2 : Trapèzes 1 3
  1-3 : Trapèzes 2 (c) 3
  1-4 : Le jardin 4
  1-5 : Dans un triangle 4
  1-6 : Cercle sur quadrillage 4
  1-7 : Bol et Billes 5
  1-8 : Les lapins 5
  1-9 : A la règle et au compas 5
  1-10 : Aires 5
  1-11 : Deux carrés en un 6
  1-12 : Sur le toit 6
  1-13 : Hexagone 6
  1-14 : Pentagone 6
  1-15 : Les boules dans la boite 7
  1-16 : Rectangle et triangle équilatéral 7
  1-17 : Théorème de Ptolémée 7
2. TPs de géométrie 8
  2-1 : Cercle et carrés 8
  2-2 : Les polygones de sustentation 9
  2-3 : Jouons avec le dessous-de-plat (IG 02/2008) 10
  2-4 : Le paravent chinois (IG 02/2008) 11
3. Analyse 11
  3-1 : Triangle équilatéral 11
  3-2 : Trajets 12
  3-3 : Distance d'un point à une courbe 12
  3-4 : Deux courbes qui se frôlent (IG 02/2008) 13
4. Arithmétique 13
  4-1 : Premier ou non premier (spé) 13
  4-2 : Les nombres repus (IG 02/2008) 14
  4-3 : La recette du kaprekar (IG 02/2008) 15
5. Tableur 15
  5-1 : Simulation de la radioactivité 15
  5-2 : Approche probabiliste d'une intégrale (IG 02/2008)16
  5-3 : Investigations autour d'une équation différentielle (IG 02/2008) 17
  5-4 : Méthode d'Euler et son domaine de validité sur un exemple 17
  5-5 : Fonction exponentielle par la méthode d'Euler 19
  5-6 : Suite récurrente : une mise en route 20
  5-7 : Problème du chien. 22

1. Problèmes de Géométrie

1-1 : Angle maximum

En se promenant sur une route rectiligne on observe un segment *AB* sous un angle α.

Cet angle varie suivant la position du point *M*.



1. En utilisant l'outil « lieu de points », tracer la courbe représentant α en fonction de la position du point *M*. Quel(s) enseignement(s) tire-t-on de cette courbe ?

2. Tracer le cercle circonscrit (C) au triangle *AMB*. Lorsque α est maximum que peut-on dire de (C) ?

3. On choisit un repère orthonormé où l'axe horizontal est la droite (d), *B* est sur l'axe vertical par exemple à l'affixe *i* et *A* à l'affixe $a+ib$. Un point quelconque du plan aura pour affixe $z=x+iy$.

On limite α à $[0\,;\pi]$.

a. On note $\arctan u$ (lire *arc tangente*) l'angle dont la tangente est *u* (ce qui est indiqué sous la forme $\tan^{-1}$ sur votre calculatrice). Montrer que $\alpha=\arctan\left(\frac{y-b}{x-a}\right)-\arctan\left(\frac{y-1}{x}\right)$.

b. En utilisant une formule de trigonométrie, démontrer que $\tan\alpha=f(x)=\frac{(1-b)x-a}{x^2-ax+b}$.

c. Etudier les variations de *f*, dresser son tableau de variation et donner les coordonnées de son maximum sur $[0\,;+\infty[$.

4. Montrer en utilisant la dérivée des fonctions composées que $(\arctan u)'=\frac{u'}{1+u^2}$. En déduire la dérivée de $g(x)=\arctan\left[f(x)\right]$.

5. a. On choisit une position particulière du segment [*AB*] : $A(2+3i)$. Faire la figure dans ce cas.

b. Dresser le tableau de variation de *g*.

c. Justifier le résultat obtenu à la question 2.

6. Voici le raisonnement tenu par le mathématicien américain d'origine hongroise Georges Pólya en 1958 :

« Choisissons un point *M* quelconque sur la droite (d). Ce point, choisi au hasard n'est vraisemblablement pas dans la position correspondant au maximum. Comment pouvons-nous décider s'il s'y trouve ou non ?

On peut faire une remarque assez facile : si un point n'est pas dans la position correspondant au maximum il doit exister un autre point, de l'autre côté de la position correspondant au maximum, où l'angle en question a la même valeur. Existe-t-il un autre point *M'* sur la droite (d) d'où l'on voit [*AB*] sous un angle égal à celui sous lequel il est vu de *M* ? Nous pouvons répondre imédiatement à cette question : *M* et *M'* (s'il existe) doivent se trouver sur un même cercle passant par *A* et *B* d'après une propriété bien connue des angles inscrits dans un cercle.

L'idée de la solution commence à apparaître. Traçons plusieurs cercles passant par les points donnés *A* et *B*. Si l'un de ces cercles coupe la ligne (d) en deux points *M* et *M'* le segment [*AB*] est vu de ces deux points sous le même angle mais cet angle n'est pas le plus grand possible : un cercle qui coupe (d) entre *M* et *M'* donne un angle plus grand. Des cercles qui coupent (d) ne peuvent donc faire l'affaire : le sommet de l'angle maximum est le point où un cercle passant par *A* et *B* touche la droite (d). »

Illustrer par une figure dynamique le raisonnement précédent.

1-2 : Trapèzes 1

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire : Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m,p) tel que : $m^2-p^2=8$? En existe-t-il plusieurs ?

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

 * $\widehat{ABC}=45°$.
 * les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD > 2.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM=2$.

Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

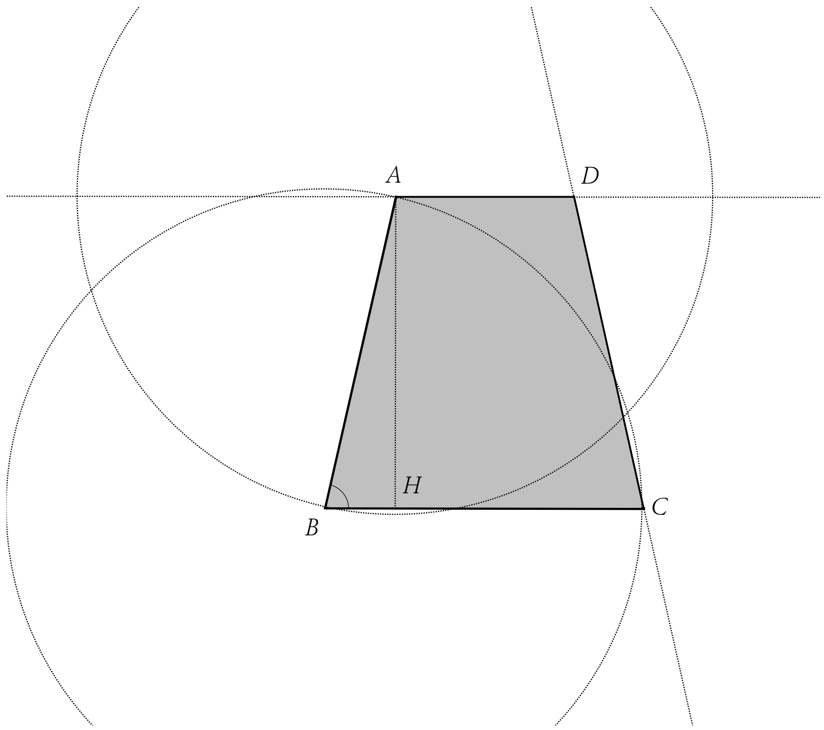
1-3 : Trapèzes 2 (c)

Cet exercice n'est pas particulièrement destiné à être résolu… Si vous y arrivez tant mieux, mais ce qui compte c'est de montrer ce que vous pouvez faire : ***toute trace écrite*** *sera prise en compte du moment qu'elle est cohérente. En tous cas n'y passez pas plus de 20-25 minutes.*

On considère un trapèze *ABCD* tel que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ aient la même mesure α.

Déterminer les valeurs de α pour que le trapèze *ABCD* ait une aire maximale sachant que les côtés *AB*, *BC* et *CD* mesurent un mètre.

Correction



On pose $\widehat{ABC}=\alpha$, alors $\dfrac{AH}{AB}=\sin\alpha \Rightarrow AH=AB\sin\alpha=\sin\alpha$;

$\dfrac{BH}{AB}=\cos\alpha \Rightarrow BH=\cos\alpha \Rightarrow AD=1-2\cos\alpha$.

L'aire est alors $\left(\dfrac{AD+BC}{2}\right)AH=\dfrac{(1-2\cos\alpha+1)}{2}\sin\alpha=(1-\cos\alpha)\sin\alpha=f(\alpha)$.

On dérive f : $f'(\alpha)=\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)\cos\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos\alpha=1+\cos\alpha-2\cos^2\alpha$; les racines du trinôme sont 1 et 1/2, on cherche donc α tel que $\cos\alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$. L'aire maxi est alors $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1-4 : Le jardin

Mon jardin est un rectangle ABCD. J'y ai planté un arbre avec un tronc très fin.

Mon arbre est situé exactement à 4 mètres de A, à 5,1 mètres de B et à 7,5 mètres de C.

A quelle distance de D se trouve-t-il ?

1-5 : Dans un triangle

Soit un triangle *ABC* dont tous les angles sont aigus. *M* est un point du segment [*BC*], *P* et *Q* désignent les projetés orthogonaux respectifs de *M* sur les droites (*AC*) et (*AB*).

1. Montrer que si le point *M* est sur le diamètre issu de *A* du cercle circonscrit au triangle *ABC*, alors la droite (*PQ*) est parallèle à (*BC*).

2. a. Montrer que les points *A*, *Q*, *M* et *P* sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Montrer que $PQ=AM\times\sin\widehat{BAC}$.

c. En déduire toutes les positions du point *M* pour lesquelles la somme des diagonales du quadrilatère *AQMP* est minimale.

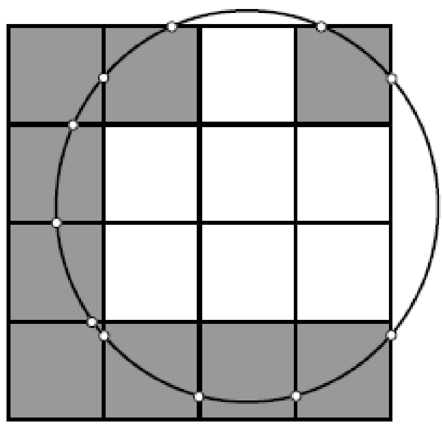
3. Déterminer toutes les positions du point *M* pour lesquelles l'aire du quadrilatère *AQMP* est maximale.

1-6 : Cercle sur quadrillage

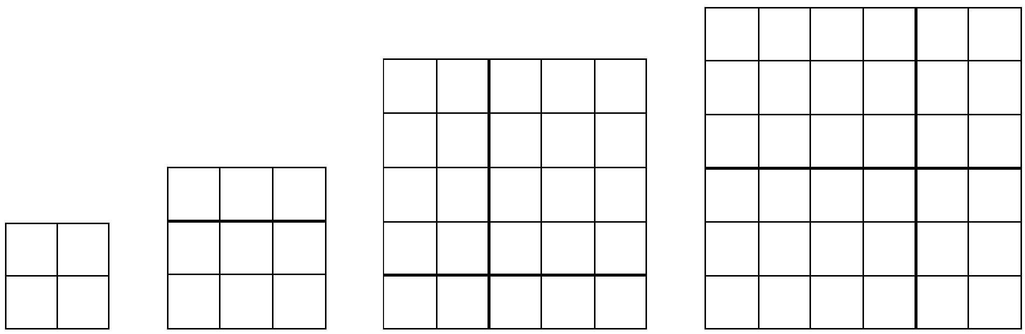
Dans un plan on dispose de damiers carrés de n cases de côté ($n\geq 2$), toutes les cases étant des carrés dont le côté est pris comme unité de longueur.

Sur chaque damier, l'objectif est de tracer un cercle qui traverse le plus grand nombre possible de cases. On considère qu'un cercle traverse une case s'il passe à l'intérieur de celle-ci.

1. Sur le damier 4×4 représenté ci-dessous, on a tracé un cercle qui traverse neuf cases. Peut-on en tracer un qui traverse davantage de cases ? Si oui, dessiner un tel cercle. Quel peut-être le nombre maximal de cases traversées ? Justifier la réponse.

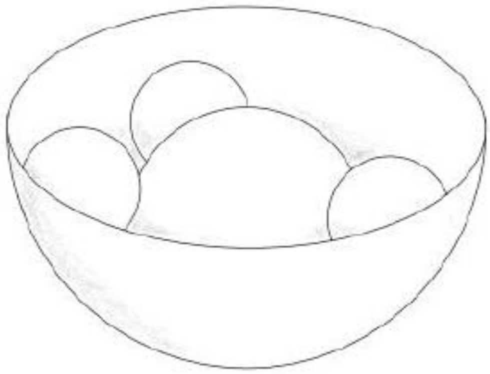


2. Sur chacun des damiers représentés ci-dessous, tracer un cercle traversant un nombre maximal de cases. Indiquer pour chaque damier le nombre de cases traversées.



3. Formuler une conjecture sur le nombre maximal de cases traversées par un cercle sur un damier $n\times n$ où $n\geq 2$. Démontrer cette conjecture.

1-7 : Bol et Billes



Jean place une grosse bille de rayon R dans un bol hémisphérique de rayon $2R$. Il pose ensuite des petites billes de même rayon autour de la grosse bille de sorte que ces billes touchent à la fois le bol, la grosse bille et affleurent la surface circulaire du bol. On a représenté ci-dessous le bol avec la grosse bille et trois petites billes.

a. Exprimer en fonction de R le rayon des petites billes.

b. Combien Jean peut-il placer au maximum de petites billes dans le bol ?

1-8 : Les lapins

Pour chaque question on fera une figure distincte.

Soit (C_1) et (C_2) deux cercles sécants de rayons respectifs R_1 et R_2 ($R_1 > R_2$) et de centres respectifs A_1 et A_2. On appelle I et J leurs points d'intersection.

Deux lapins L_1 et L_2 parcourent respectivement (C_1) et (C_2) dans le même sens (prendre le sens de rotation des aiguilles d'une montre) avec la même vitesse angulaire. Ils partent en même temps du point I.

1. Dessiner la position des deux lapins correspondant à un angle de 45 °.

2. Dessiner la position de L_2 lorsque L_1 se trouve en J, et en utilisant une autre couleur, la position de L_1 lorsque L_2 se trouve en J. Dans les deux situations que peut-on dire des triangles L_1JL_2 ?

3. Montrer que L_1, L_2 et J sont toujours alignés.

4. Existe-t-il une position de L_2 où J est le milieu de $[L_1, L_2]$?

Dans l'affirmative donner la construction permettant de déterminer les points L_1 et L_2.

5. Montrer qu'il y a un point fixe du plan qui est, à tout instant, équidistant de L_1 et de L_2.

1-9 : A la règle et au compas

1. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que les droites (AB) et (CD) soient strictement parallèles et tels que $AB \neq CD$. Montrer que l'on peut construire le milieu O du segment $[AB]$ uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction.

2. Soit A et B deux points distincts du plan, O le milieu du segment $[AB]$ et E un point quelconque du plan. Montrer que l'on peut construire une parallèle à la droite (AB) passant par E uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction.

3. Soit O un point du plan et r un réel strictement positif ; Γ le cercle de centre O et de rayon r ; $[AB]$ un diamètre du cercle Γ. Montrer que l'on peut construire le symétrique B_1 de B par rapport à A uniquement avec une règle non graduée. Faire la construction.

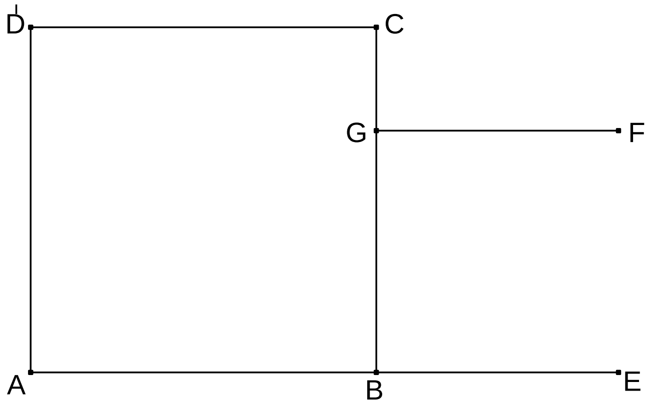
1-10 : Aires

ABCD est un quadrilatère convexe quelconque.

I ,J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

Où doit-on placer un point O tel que les quadrilatères OIAL, OJBI, OKCJ et OLDK aient la même aire ?

1-11 : Deux carrés en un



ABCD et BEFG sont deux carrés dont les côtés ont pour longueurs respectives a et b, de telle sorte que $a > b$.

1. Soit I le point d'intersection des droites (EG) et (DF). Démontrer que I est le milieu du segment $[FD]$.

2. Soit Γ le cercle de centre I passant par le point B. On note H le deuxième point d'intersection de Γ avec la droite (AB). Justifier que $[FD]$ est un diamètre de Γ, puis démontrer que la droite (IH) est la médiatrice de $[FD]$.

3. Soit J le point d'intersection des droites (BG) et (HF).

On « découpe » la figure initiale selon les triangles EFH, FGJ, ADH et le quadrilatère CDHJ.

Montrer qu'en assemblant ces 4 polygones sans les superposer, on peut reconstituer un carré. Faire un dessin avec $a = 4$ cm et $b = 3$ cm.

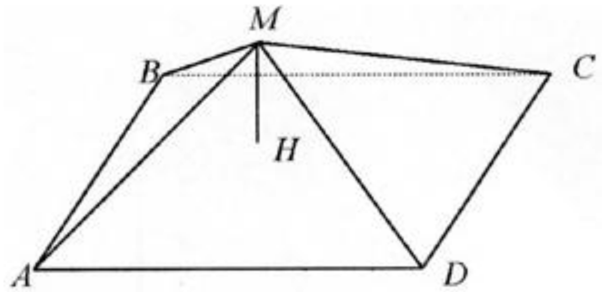
4. Exprimer la longueur c = DH en fonction de a et b.

1-12 : Sur le toit

Un radio amateur place un mât d'antenne sur le toit rectangulaire de son garage à l'endroit où il fournit la meilleure réception (on suppose que ce mât est orthogonal au plan du toit).

Il fixe alors ce mât par des câbles rectilignes en fil de fer qui vont de la cime jusqu'aux coins du toit selon le schéma ci-dessous.

Sur ces quatre câbles, deux câbles non consécutifs mesurent 7 mètres et 4 mètres, un troisième mesure 1 mètre. Quelle est la longueur du dernier câble ?



1-13 : Hexagone

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.

On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

Les points P, Q, R, S, T et U sont les centres de gravité respectifs des triangles GAC', GBC', GBA', GCA', GCB' et GAB'.

1. Justifier l'égalité : PQ + QR + RS + ST + TU + UP = PS + QT + RU.

2. Calculer l'aire de l'hexagone PQRSTU en fonction de celle du triangle ABC.

1-14 : Pentagone

ABC est un triangle isocèle (AB = AC) dont l'angle $\widehat{A}$ est obtus $\frac{\pi}{2} < \widehat{A} < \pi$. On prendra AB = 8 cm.

1. Compléter le triangle ABC par deux points D et E de telle sorte que AB=BD=DE=EC, que la figure ABDEC admette pour axe de symétrie la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et que les points D et A ne soient pas du même côté de la droite (BC).

2. En déduire la construction d'un pentagone AMNPQ dont les 5 côtés ont la même longueur et tel que le point M appartienne au segment [AB], les points N et P appartiennent au segment [BC] et le point Q appartienne au segment [CA]. On expliquera et justifiera le construction.

3. On suppose que le pentagone ABDEC de la question 1. est régulier. Quelle est la valeur nécessaire de l'angle $\widehat{A}$? On note β cette valeur et on pose $\alpha = \frac{\beta}{3}$.

a. Montrer que α est égal à l'angle $\widehat{ABC}$ dans le triangle ABC, et qu'il vérifie $\cos\alpha = \frac{1}{2} + \cos(2\alpha)$

b. On suppose que $\widehat{A} = \beta$. Démontrer que le pentagone ABDEC est régulier

1-15 : Les boules dans la boite

A - On dispose de deux boules de rayon *r* que l'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale carrée et de hauteur 2*r*. On admettra que dans ces conditions les deux boules sont en contact et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer en fonction de *r* les dimensions de la boîte.

2. Dans le cas où *r* = 2, réaliser une construction du côté de la boîte.

B - On dispose de trois boules de rayon *r* qu'on veut placer dans la plus petite boîte possible de section orthogonale triangulaire équilatérale et de hauteur 2*r*. On admettra que dans ces conditions les trois boules sont en contact deux à deux et qu'elles sont chacune en contact avec deux côtés latéraux contigus de la boîte.

1. Déterminer la longueur du côté de cette boîte.

2. Dans le cas où *r* = 2, exprimer la longueur du côté sous une forme exacte non trigonométrique ne contenant que des racines carrées puis sous une forme approchée à 10^{-2} près.

3. Á partir d'un triangle équilatéral dont le côté a pour valeur approchée en centimètres celle trouvée dans la question précédente, réaliser une construction vue de dessus de la boîte et des trois boules qu'elle contient.

1-16 : Rectangle et triangle équilatéral

L'unité de longueur est le décimètre. On construit un rectangle ABCD et un triangle équilatéral DEF tels que : * A et E sont fixes avec AE=1,

* D est un point mobile du segment [AE],

* le périmètre du rectangle ABCD est 2.

Les points B, C et F sont situés dans le même demi-plan, délimité par la droite (AE). On introduit :

(C) le cercle circonscrit au rectangle ABCD, de centre noté O,

(C') le cercle circonscrit au triangle DEF, de centre noté O'.

Les cercles (C) et (C') se coupent en D et en un autre point D', (supposé distinct de D dans la suite).

On pose *x* = DE.

1. Construire la figure avec *x* = 0,6.

2. Pour quelle(s) position(s) du point D le rectangle ABCD et le triangle DEF ont-ils la même aire ?

3. Pour quelle valeur de *x* le quadrilatère ODO'D' est- il un losange ?

4. Montrer que, pour la valeur de *x* trouvée à la question 3, le losange ODO'D' est un carré.

1-17 : Théorème de Ptolémée

Ptolémée était un mathématicien et astronome grec du 2e siècle après J.-C. ; il utilisait une relation pour calculer les longueurs des cordes d'arc de cercle, ancêtres de nos rapports trigonométriques.

D'une manière générale, si M, N, P, Q sont quatre points tels que $M \neq N$ et $P \neq Q$, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$ désigne une mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ})$.

Dans le plan orienté on considère quatre points distincts *A*, *B*, *C* et *D* se succédant dans le sens trigonométrique sur un même cercle.

On place sur [AC] le point E tel que $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right)$(modulo 2π).

Première partie : uniquement avec un LGD

1. Faire la figure, mesurer les angles des triangles ABD et BEC. Calculer le quotient $\dfrac{EC\times BD}{BC\times AD}$.

2. Mesurer les angles des triangles ABE et BDC. Calculer le quotient $\dfrac{EA\times BD}{AB\times DC}$.

3. Quelle relation pouvez-vous écrire entre les longueurs AC, BD, AB, DC, BC et AD ?

Deuxième partie

1. Prouvez les résultats du 1. et du 2.

2. Déduisez de la relation obtenue au 3. que $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

2. TPs de géométrie

2-1 : Cercle et carrés

(d'après Bac S France juin 2005, M. Obadia & C. Tremblay)

Dans le plan orienté, on considère deux points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$ et M un point variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des point O et A.

On considère de même les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$.

On note enfin G le milieu du segment $[PL]$.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de déterminer le lieu des points N.

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler le professeur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la position du point G lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé de O et A ?

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire :

a. sur la distance KN ?

b. sur la nature du triangle GNK ?

Appeler le professeur pour valider les conjectures.

4. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point N lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé de O et A. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

5. Afficher un repère orthonormal direct. Déplacer les points O et A de sorte que O soit l'origine de ce repère et A le point de coordonnées $(1;0)$. Agrandir la figure de manière à la rendre lisible.

Quelles sont alors les coordonnées du point G ? Que vaut la distance KN ?

Production écrite

Objectif : démontrer partiellement ou totalement les conjectures émises.

Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathcal{C}$ et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note k, l, m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathcal{C}$, on a $\left|m-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$.

2. Établir les relations suivantes : $l = im$ et $p = -im + 1 + i$.

On admettra que l'on a également $n=(1-i)m+i$ et $k=(1+i)m$.

3. a. Démontrer que le milieu G du segment $[PL]$ est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

b. Démontrer que le point G appartient au cercle $\mathcal{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.

4. a. Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

b. Quelle est la nature du triangle GNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

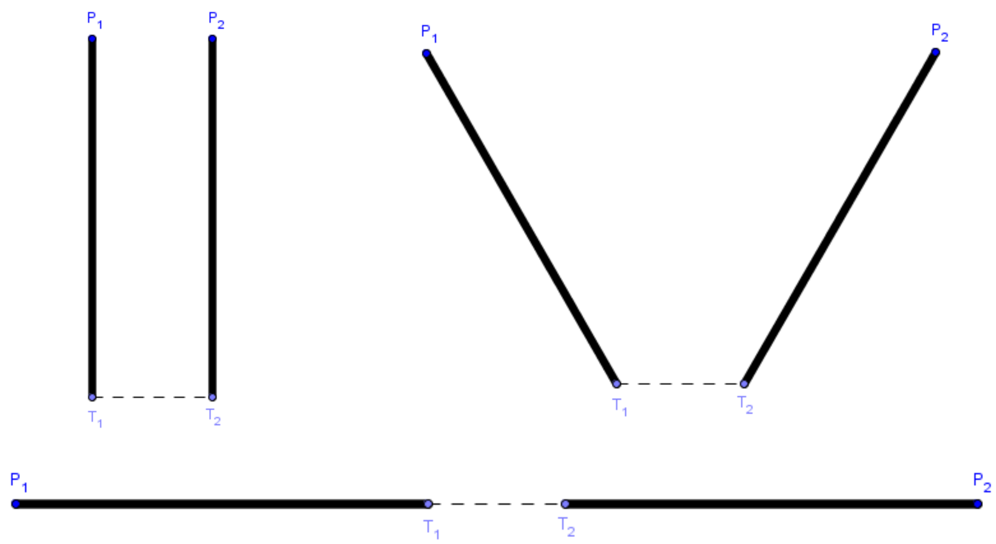
2-2 : Les polygones de sustentation

Mayssa décide de nous faire une démonstration de Tecktonik (avec les bras serrés contre le corps). Elle s'aperçoit que si elle se tient les pieds joints et serrés, elle tient debout.

Si les pointes des pieds sont un peu écartées, elle tient debout, mais elle constate que son équilibre n'est pas parfait. Par contre, si elle met ses talons et les pointes de ses pieds opposés, elle a des difficultés à tenir debout.

Entre les deux positions extrêmes, essayons d'aider Mayssa afin qu'elle prenne une position qui lui procure une stabilité maximale.

Supposons que chacun de ses pieds mesure 30 cm et que ses talons soient séparés de 10 cm, schématisons alors chacune des situations précédentes de la façon suivante :



L'objectif est de rechercher la position des pieds afin que l'aire du quadrilatère $T_1T_2P_2P_1$ soit maximale.

Pour quelle raison ? Si vous regardez une table, ses quatre pieds déterminent une surface géométrique que l'on appelle **polygone de sustentation**. Si vous levez deux pieds de cette table, la surface géométrique va diminuer jusqu'à ce que le projeté du centre de gravité de la table sur le sol sorte de cette surface. La table basculera à ce moment-là.

1. Construire une figure dynamique permettant de représenter les différentes positions schématisées des pieds.

On notera θ une mesure (en degrés ou en radians) de l'angle que fait un pied $[T_2P_2]$ avec la droite (T_1T_2)
.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction

2. Déterminer la valeur de θ, notée θ_m, telle que les points P_1 et P_2 soient confondus.

Vous donnerez d'abord la mesure exacte, puis une approximation au dixième près.

Appeler l'examinateur pour une vérification du résultat

Pour la suite de l'exercice on supposera que θ appartient à $[0\,;\,\theta_m]$.

3. En faisant varier le réel θ, conjecturer la valeur de θ afin que l'aire de $T_1T_2P_2P_1$ soit maximale. Quelle est alors la valeur de cette aire ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

4. Justification mathématique de la conjecture

a. Soit A l'aire du trapèze $T_1T_2P_2P_1$. Montrer que $A=300(1+3\cos\theta)\sin\theta$.

b. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,\theta_m]$ par $f(\theta)=(1+3\cos\theta)\sin\theta$.

Montrer que la fonction f admet un maximum pour $\theta=\theta_0$ tel que $\cos\theta_0=\dfrac{-1+\sqrt{73}}{12}$.

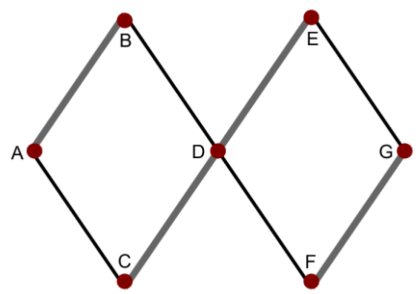
c. En déduire une valeur approchée de θ pour que l'aire de $T_1T_2P_2P_1$ soit maximale.

5. Pouvez vous imaginer une position des pieds de Mayssa non envisagée dans la situation précédente (les talons sont toujours écartés de 10 cm) ? Si vous trouvez une telle position, l'aire du polygone de sustentation est-elle alors plus grande que celle trouvée en 3. ?

Production demandée.

- Réponses à la question 4.

2-3 : Jouons avec le dessous-de-plat (IG 02/2008)



Un dessous-de-plat (style années 50) est constitué de six barres métalliques rigides, de différentes longueurs, assemblées et articulées entre elles pour former deux losanges de côté 1 (voir la figure ci-dessus).

Pour simplifier l'étude, on suppose que les barres sont de largeur nulle. Les barres sont alors représentées par les segments [*AB*], [*AC*], [*BF*], [*CE*], [*EG*] et [*FG*].

Le point A est supposé fixe. On déplace le point G le long d'une demi-droite d'extrémité A ; on constate que si le dessous de plat passe de la position de repli complet à l'extension complète, le point G décrit un segment de droite.

1. Préciser la longueur du segment décrit par le point G.

2. Construire une figure représentant ce dessous-de-plat en utilisant un logiciel de géométrie dynamique.

3. Comment se déplacent les points B et C lorsque l'on déforme le dessous-de-plat (passage de la position de repli à l'extension complète) ?

En utilisant le logiciel, faire apparaitre l'ensemble de points décrit par le point E lors de la déformation du dessous-de-plat.

4. On définit désormais le repère orthonormal direct $\left(A\,;\vec{u},\vec{v}\right)$ où le vecteur $\vec{u}$ est unitaire et colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AD}$. On note t l'abscisse du point G (t étant un réel positif).

a. Dans quel intervalle évolue le réel t lorsque l'on passe de l'extension complète à la position de repli ?

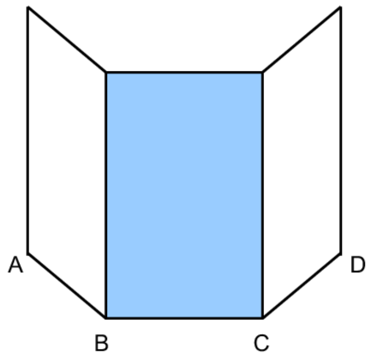
b. Déterminer les coordonnées du point E en fonction de t.

c. En utilisant le logiciel, tracer la courbe représentative (C) de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3] par : $f\left(x\right)=\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$.

d. Vérifier à l'aide du logiciel que le point E appartient à la courbe (C).

e. Retrouver le résultat précédent par un calcul.

2-4 : Le paravent chinois (IG 02/2008)



Un paravent chinois se compose de 3 panneaux rectangulaires de mêmes dimensions. Les petits côtés, qui sont en contact avec le sol, mesurent 1 mètre.

Ce paravent découpe sur le sol un trapèze $ABCD$. On supposera que les angles ABC et BCD ont la même mesure et que les droites (AD) et (BC) sont parallèles. Ce polygone s'appelle le polygone de sustentation.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de l'angle ABC qui assure au polygone de « sustentation » une aire maximale.

1. Construire un trapèze $ABCD$ tel que $AB=BC=CD$ et (AD)//(BC). On s'assurera que la valeur de l'angle $a=ABC$ soit variable.

2. Conjecturer la valeur du réel a pour laquelle l'aire s du trapèze est maximum.

3. On note H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AD) et on note t l'angle ABH, t étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Visualiser, à l'aide du logiciel, l'ensemble des points M de coordonnées (t, s).

4. Validation de la conjecture.

a. Démontrer que la fonction f définie par : $f\left(t\right)=\left[1+\sin\left(t\right)\right]\cos\left(t\right)$ représente l'aire du trapèze $ABCD$ en fonction de t.

b. Vérifier à l'aide du logiciel que le point M est sur la courbe représentative de la fonction f.

c. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et conclure.

3. Analyse

3-1 : Triangle équilatéral

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre O.

On considère un point M du segment [AB]. On pose x = AM. Si les droites (MO) et (AC) sont sécantes, on appelle N leur point d'intersection.

1. Quel est l'ensemble I des réels x pour lesquels N appartient au segment [AC] ?

2. Pour tout x élément de I, on note $S(x)$ l'aire du triangle AMN. Quelles sont les valeurs minimale et maximale de $S(x)$?

3-2 : Trajets

Quatre maisons sont situées aux quatre coins d'un carré de côté 1. On souhaite construire un réseau routier qui permette de relier les maisons mais on veut que ce réseau soit le plus court possible.

1. Dans un premier temps on envisage de créer un rond-point à l'intérieur du carré comme dessiné sur la figure 1. Quel est alors le réseau le plus court ?

2. Un des habitants s'est rendu compte qu'avec deux ronds-points placés comme sur la figure 2, on pouvait réduire la longueur du réseau.Vérifier qu'il a raison.

3. Trouver la valeur de x qui permet d'obtenir le réseau le plus court dans la configuration de la figure 3.

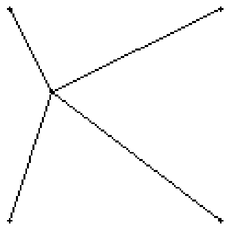


figure 1

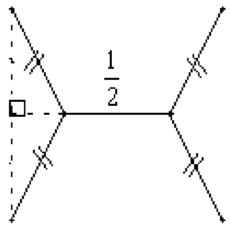


figure 2

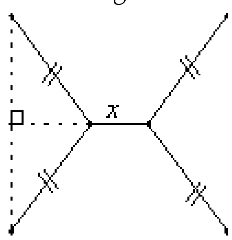


figure 3

3-3 : Distance d'un point à une courbe

Si Γ est un ensemble non vide de points du plan (resp. de l'espace) et si A est un point du plan (resp. de l'espace), on appelle distance de A à Γ, le plus grand des minorants de l'ensemble {AM ; M $\in \Gamma$}, ce nombre est noté d(A ; Γ).

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x$ et on note (P) sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

1. Soit A un point du plan et M un point de (P). On note x son abscisse.

On considère le cercle (C) de centre A qui passe par M.

a. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de construction géométrique.

b. Déterminer les éventuelles positions de M pour lesquelles la distance AM est minimale.

c. Recommencer pour différentes positions du point A.

<u>2. Conjectures</u>

a. Y a-t-il des positions de A où il n'y a aucune position de M pour laquelle AM est minimale ? Si oui lesquels ?

b. Y a-t-il des cas où il y a plusieurs positions de M pour lesquelles AM est minimale ? Si oui lesquels ?

c. Comment sont positionnés le cercle (C) et la courbe (P) lorsque AM est minimale ?

d. Quelle condition vérifie le vecteur $\overrightarrow{AM}$ lorsque AM est minimale ? Est-ce que la distance AM est minimale lorsque le vecteur $\overrightarrow{AM}$ vérifie cette condition ?

Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses .

<u>3. Détermination de quelques distances</u>

Utiliser le logiciel pour déterminer une valeur approchée de la distance de A à (P) dans chacun des cas suivants :

a. A(2 ; 0) b. A(0 ; 2) c. A(5 ; 1) d. A(– 5 ; – 2)

Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses .

<u>4. Démonstration</u>

Démontrer la condition que doit vérifier le vecteur $\overrightarrow{AM}$ lorsque AM est la distance minimale trouvée.

Production : Rédiger les réponses aux 1. et 2. et la démonstration du 3.

3-4 : Deux courbes qui se frôlent (IG 02/2008)

Objectif : Il s'agit de déterminer, dans certains cas particuliers, les conditions pour qu'une parabole et un cercle soient tangents l'un à l'autre (c'est-à-dire qu'ils ont un point commun en lequel leurs tangentes respectives sont identiques).

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Soit r un nombre réel strictement positif. On considère la parabole P d'équation $y=x^2-3$ et le cercle C de centre O et de rayon r.

1. Un peu d'exploration

a. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique construire la parabole P et le cercle C.

b. Conjecturer le nombre de points communs à la parabole P et au cercle C en fonction du nombre réel r.

c. Donner une valeur approchée du (ou des) rayon(s) r tel(s) que la parabole P et le cercle C soient tangents (c'est-à-dire, se coupent en un point où leurs tangentes sont les mêmes) et donner dans ce cas une valeur approchée des coordonnées des points de tangence observés.

On suppose dans la suite de cette étude que $0<r<3$.

2. Un peu de calcul

a. Écrire un système (S) d'équations vérifié par les coordonnées x et y des points communs à la parabole P et au cercle C lorsqu'ils existent.

b. En déduire qu'alors x est solution d'une équation (E) « bicarrée », soit de la forme $ax^4+bx^2+c=0$, et pour laquelle on explicitera les valeurs de a, b et c.

3. Un peu de justification

a. Discuter du nombre de points d'intersection du cercle et de la parabole lorsque $0<r<3$ et faire le lien avec le nombre de solutions de l'équation (E).

b. Caractériser les cas de tangence et en déduire la valeur du rayon r, ainsi que les coordonnées des points communs à la parabole P et au cercle C, dans ce cas.

4. Arithmétique

4-1 : Premier ou non premier (spé)

Le but de l'activité est de déterminer si les nombres de la forme a^4-1 et a^4+4 peuvent être premiers, a étant un entier **supérieur ou égal à 2**.

On s'intéresse aux nombres de la forme $A=a^4-1$ et $B=a^4+4$, a étant un entier supérieur ou égal à 2.

Partie A

1. À l'aide d'un tableur, calculer la valeur de A pour a compris entre 2 et 100.

2. Conjecturer suivant la valeur de a le reste de la division de A par 5.

Appeler le professeur.

Partie B

1. A l'aide d'un tableur, calculer la valeur de B pour a compris entre 2 et 100.

2. Conjecturer pour quelles valeurs de a, B est divisible par 5.

Appeler le professeur.

3. Quels sont les nombres de la liste obtenue dont on ne peut pas dire de façon évidente qu'ils ne sont pas premiers ? Que remarquez-vous ?

Appeler le professeur.

Partie C preuves

1. Prouver la conjecture faite en A. 2.

2. A peut-il être un nombre premier ?

3. Prouver la conjecture faite au B. 2.

4. Prouver que si a est un multiple impair de 5, alors $B-\ldots$ est un multiple de 1000.

En déduire la preuve du B. 3.

5. Prouver que B n'est jamais premier, en remarquant que $a^4+4=a^4+4a^2+4-\ldots$

Appeler le professeur pour une éventuelle question subsidiaire.

<u>Production demandée :</u>

- construction des listes sur tableur et conjectures.
- preuves écrites pour les questions de la partie C.

4-2 : Les nombres repus (IG 02/2008)

On appelle « nombre repu » tout entier naturel dont un multiple a une écriture décimale ne comportant que le chiffre 1. Par exemple, 13 est un nombre repu puisque $13\times 8547=111\,111$.

On démontre (voir question 3) que si un nombre n est un nombre repu, il existe un nombre p tel que l'écriture décimale de np ne comporte que le chiffre 1, *ce chiffre étant répété au plus n fois*.

Pour tout k entier naturel, on désigne par u_k l'entier dont l'écriture décimale comprend exactement k fois le chiffre 1 : $u_k=111\ldots1=10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10+1=\sum_{i=0}^{k-1}10^i$.

1. Dans un premier temps on veut programmer sur un tableur ou sur une calculatrice un test pour reconnaître si un nombre $n<100$ est ou non un nombre repu.

D'après ce qui précède, il suffit de tester si l'un des nombres 111, 1111, ... est divisible par n, en s'arrêtant lorsqu'on trouve un reste nul ou lorsqu'on a testé la divisibilité de u_k par n.

Pour le réaliser, on pratique un algorithme semblable à celui de la division euclidienne posée, mais au lieu à chaque étape de rajouter un 0 à droite du reste précédent, ***on rajoute un 1***. En reprenant l'exemple précédent, on obtient :

	$111=8\times 13+7$	donc $1111=80\times 13+71$,
comme $71=5\times 13+6$,	$1111=85\times 13+6$	donc $11111=850\times 13+61$,
comme $61=4\times 13+9$,	$11111=854\times 13+9$	donc $111111=8540\times 13+91$,
comme $91=7\times 13+0$,	$111111=8547\times 13$	et on s'arrête là puisque le reste est nul.

Cet algorithme peut encore se symboliser par les quatre étapes de la division euclidienne posée:

111	13	1111	13	1111	13	11111	13	111111	13
7	8	71	85	71	85	71	854	71	8547
		6		6		61		61	
						9		91	
								0	

Mettre en place ce test sur la calculatrice ou le tableur pour un nombre de un ou deux chiffres. En essayant plusieurs nombres conjecturer les nombres de un ou deux chiffres qui ne sont pas des nombres repus et donner une propriété (P) permettant de les définir.

2. Démontrer que la propriété (P) définissant les nombres de un ou deux chiffres qui ne sont pas des nombres repus s'étend à tous les entiers, c'est-à-dire que « tous les entiers naturels vérifiant la propriété (P) sont non repus ».

Énoncer la propriété réciproque de la propriété (P) : cette propriété réciproque est vraie mais on ne demande pas de la démontrer.

3. Soit n un entier au moins égal à 2 ; pour $1\le k\le n$ on désigne par r_k le reste de la division euclidienne de u_k par n. Montrer que si aucun des r_k n'est égal à 0, il existe p et q tels que $1\le p<q\le n$ et $r_p=r_q$ et qu'alors n n'est pas un nombre repu.

4-3 : La recette du kaprekar (IG 02/2008)

Soit un nombre N de trois chiffres dont deux au moins sont distincts. On note G le nombre formé avec ces mêmes chiffres pris dans l'ordre décroissant et P le nombre formé avec ces mêmes chiffres pris dans l'ordre croissant.

On calcule la différence $D=G-P$. Le nombre D devient le nombre initial et on recommence le calcul.

Exemple : $N=878$ donne $G=887$, $P=788$ et $D=887-788=99$; on remplace N par 99.

L'algorithme s'arrête lorsqu'on obtient deux fois de suite le même nombre D.

1. À l'aide d'un tableur et des fonctions =ENT(A), =MOD(A;B), =MAX(A:B), =MIN(A:B) qu'il fournit :

a. Établir des formules permettant de calculer les chiffres des unités, dizaines, centaines d'un nombre de trois chiffres puis celles donnant G, P et $G-P$ afin de réaliser un tableau d'au moins 7 colonnes, comme celui de l'exemple ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G
1	N	Centaines	Dizaines	Unités	G	P	D
2	878	8	7	8	887	788	99
3	99	0	9	9	990	99	...

b. Appliquer l'algorithme aux nombres 787, 877 et 794 puis à différents nombres de trois chiffres.

Qu'observe-t-on ? Émettre diverses conjectures sur la suite des nombres obtenus dans la colonne A.

2. Démontrer au moins deux des conjectures émises.

5. Tableur

5-1 : Simulation de la radioactivité

Remarque technique : on utilise ici la fonction **=ALEA()** d'Excel. Cette fonction renvoie un nombre au hasard (aléatoire) compris entre 0 et 1 (1 non compris).

A chaque saisie d'une nouvelle cellule Excel recalcule toute la feuille, ce qui n'est pas très pratique parfois. Pour éviter cet inconvénient, faire « Outils », « Options », « Calcul » puis mettre « Recalcul » à « sur ordre » et décocher « recalcul avant enregistrement ».

Dorénavant vous devrez appuyer sur la touche « F9 » pour recalculer votre feuille.

Un « bon » moyen de simuler la rédioactivité est de lancer un dé à n faces de nombreuses fois, par exemple 5000 fois et de compter par exemple tous les 1. Le nombre de 1 correspond alors au nombre d'atomes se désintégrant sur une période de temps Δt .

On supprime alors les dés ayant marqué 1 et on relance les dés restants ; on compte les 1, on supprime les dés correspondants, etc.

1. Entre les formules suivantes, laquelle permet de simuler le lancer d'un dé à 10 faces ?

=ALEA(10)   =10*ALEA()   =10*ENT(ALEA())   =ENT(10*ALEA())   =1+ENT(10*ALEA())

On utilise donc une de ces formules que l'on recopie sur 5000 lignes dans la colonne A ;

- pour compter le nombre de 1 sur les 5 000 lignes on utilise la fonction =NB.SI(Cellule1 :Cellule2 ;1) ;
- pour compter le nombre de termes dans une colonne on utilise la fonction =NB(Cellule1 :Cellule2) ;
- pour mettre une condition sur une cellule on utilise la fonction =SI(condition ;si vrai ;si faux).

Par exemple si il y a 1 dans A3 on peut écrire dans B3 : =SI(A3=1 ;0;2) qui mettra 0 si A3 = 1, 2 sinon.

2. Quelle formule mettre dans la colonne B pour avoir 0 si on a 1 dans A et de nouveau un nombre aléatoire sinon ?

3. a. Recopier la colonne B sur une douzaine de colonnes, calculer la proportion de dés encore actifs à chaque colonne, tracer les résultats en fonction du numéro de colonne.

b. Recalculer plusieurs fois la feuille pour vérifier la stabilité de la simulation.

4. Ainsi que vous l'avez vu en Physique et en Maths, la désintégration radioactive suit une loi exponentielle : le nombre de noyaux subsistants est donné par la fonction $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, N_0 étant le nombre initial de noyaux : on peut prendre ici $N_0=1$.

a. Trouver la valeur de la constante λ pour $n=10$. Vérifier que la fonction N est bien ajustée à la courbe de la question 3.

b. Reprendre la question précédente avec $n=5, 8, 12, 20, 40$. Quelle est la relation entre λ et n ? Comment l'interprétez-vous physiquement ?

c. Déterminer alors la période (demi-vie) de l'élément considéré pour chaque valeur de *n*.

d. Le $_{14}$C a une période de 5000 ans environ. A quelle valeur de *n* cela corrspond-il ?

5-2 : Approche probabiliste d'une intégrale (IG 02/2008)

Soit *g* la fonction numérique définie pour tout *x* appartenant à [0 ; 1] par $g(x)=x(1-x)\mathrm{e}^{2x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. À l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice représenter la courbe (C).

b. Soit *I*, *J* et *K* les points de coordonnées respectives (1 ; 0), (0 ; 1) et (1 ; 1). Observer la position de la courbe (C) par rapport au carré *OIKJ*.

Dans la suite de l'exercice, on note D l'ensemble des points de coordonnées (*x* ; *y*) tels que $0\le x\le 1$ et $0\le y\le g(x)$.

On admet que, lorsqu'on choisit un point au hasard à l'intérieur du carré *OIKJ*, la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble D est égale à l'aire de cet ensemble (c'est-à-dire de la partie du carré *OIKJ* située sous la courbe (C)).

On choisit au hasard un point à l'intérieur du carré *OIKJ*. On cherche quelle est la probabilité d'obtenir un point appartenant à l'ensemble D.

2. a. À l'aide d'un tableur, simuler le tirage d'un échantillon de 200 points à l'intérieur du carré *OIKJ* et déterminer la fréquence des points appartenant à D dans cet échantillon.

On utilisera la fonction **=ALEA()** qui donne un nombre entre 0 et 1 (non compris).

b. Réaliser 9 autres simulations de tirages d'échantillons de 200 points choisis au hasard dans le carré *OIKJ* et compléter le tableau de valeurs suivant où *k* est le rang de l'échantillon et f_k la fréquence des points appartenant à l'ensemble D dans l'échantillon de rang *k*.

rang *k*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
fréquence f_k										

Donner des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près.

c. À l'aide d'autres simulations, émettre une conjecture sur la probabilité que le point choisi appartienne à l'ensemble D.

3. Dans cette question on envisage quelques formes de vérifications de la conjecture précédente.

a. Montrer que la probabilité que le point choisi aléatoirement dans le carré *OIKJ* appartienne à l'ensemble D est $p=\int_0^1 g(x)\,dx$.

b. Calculer *p* à l'aide de deux intégrations par parties successives.

4. Dans l'exemple ci-dessus on peut calculer l'intégrale, mais ce n'est pas toujours le cas évidemment. On regarde ici une méthode numérique.

a. On découpe l'intervalle [0 ; 1] en n parties identique de largeur $\frac{1}{n}$: [0 ; 1] est alors la réunion d'intervalles de la forme $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ avec k variant de 0 à $n-1$.

En faisant un petit schéma vérifier que l'aire sous la courbe (C) dans l'intervalle $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]$ est comprise entre $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. Le sens de variation de g a-t-il une influence sur ce résultat ¿

b. Donner un moyen simple de calcul approché de $p=\int_0^1 g(x)dx$.

c. Retrouver les résultats précédents.

5-3 : Investigations autour d'une équation différentielle (IG 02/2008)

On considère l'équation différentielle $(E)\ y'=-2xy$.

Dans une première partie, la méthode d'Euler nous donnera une approximation sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f solution qui vaut 1 en 0. Dans une deuxième partie nous vérifierons qu'une fonction donnée est solution et nous comparerons à l'approximation trouvée en première partie.

1. On se donne un pas h strictement positif et deux suites (x_n) et (y_n) définissant une suite de points (M_n) de coordonnées (x_n, y_n) où :

* $x_0=0, x_{n+1}=x_n+h$,
* $y'_n=-2x_ny_n$,
* $y_0=1$ et $y_{n+1}=y_n+hy'_n$.

Les termes y_n sont des approximations de $f(x_n)$ par la méthode d'Euler.

a. À l'aide d'un tableur, faire apparaître les valeurs approchées à 10^{-2} près de x_n et de y_n pour un pas h valant 0,1.

n	x_n	y_n	y'_n
0	0	1	0
1			
2			
3			
4			

b. À l'aide du grapheur, représenter la suite des points (M_n).

2. a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^{-x^2}$ est une solution de l'équation différentielle $y'=-2xy$.

b. En posant pour tout réel x, $h(x)=e^{x^2}g(x)$, montrer que h est une fonction constante et que g est la seule solution de l'équation telle que $g(1)=0$.

Tracer à l'aide du grapheur la courbe de f et comparer avec l'approximation obtenue dans la question 1.

5-4 : Méthode d'Euler et son domaine de validité sur un exemple

Objectifs du problème

A partir d'un modèle discret (*une suite*) défini à l'aide de la méthode d'Euler, aboutir à un modèle continu (*une fonction*). Puis, une fois la fonction parfaitement déterminée, chercher pour quelles valeurs du pas de la méthode d'Euler, les deux modèles donnent des résultats similaires.

Préambule

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Afin d'obtenir une approximation de la courbe (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $\left[0\,;+\infty\right[$, inconnue mais dont on admet l'existence et l'unicité, passant par l'origine O du repère, on utilise la méthode d'Euler avec un pas égal à 0,2.

On obtient ainsi une suite de points notés M_n, d'abscisse x_n et d'ordonnée y_n telles que :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ x_{n+1} = x_n + 0{,}2\ ; \\ y_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ y_{n+1} = -0{,}2y_n^2 + y_n + 0{,}8. \end{cases}$$

Partie A – Etude d'une suite

1. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculer les coordonnées des points M_n pour n entier naturel vérifiant $0 \le n \le 7$ et représenter le nuage de points M_n ainsi obtenu.

2. Par lecture graphique, quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation de la suite $\left(y_n\right)$ et sur sa convergence ?

3. Démonstration des conjectures précédentes.

Pour tout réel x, on pose $p\left(x\right) = -0{,}2x^2 + x + 0{,}8$.

a. Démontrer que si $x \in \left[0\,;2\right]$ alors $p\left(x\right) \in \left[0\,;2\right]$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \le y_n \le 2$.

c. Etudier le sens de variation de la suite $\left(y_n\right)$.

d. Démontrer que la suite $\left(y_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B – Recherche d'une équation différentielle dont f doit être une solution

1. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression du coefficient directeur a_n de la droite $\left(M_nM_{n+1}\right)$ en fonction de y_n.

2. L'existence de la fonction f étant admise, on note M et P les points de (C) d'abscisses respectives x et $x+h$ avec $x \in \left[0\,;+\infty\right[$ et h un réel non nul tel que $x+h \in \left[0\,;+\infty\right[$.

Quel est le coefficient directeur de la droite $\left(MP\right)$?

3. On admet qu'il est égal à $4 - \left[f\left(x\right)\right]^2 + \varepsilon\left(h\right)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Par passage à la limite, justifier que la fonction f doit être nécessairement solution d'une équation différentielle (E) à préciser.

En déduire la solution de $\left(E\right)$ qui s'annule en 0.

Partie C – Etude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $g\left(x\right) = 2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$.

1. Prouver que la fonction g est égale à la fonction f de la question B-2.

2. En utilisant une calculatrice ou un tableur, construire la courbe (C) et sa tangente (T) au point O.

Quelles conjectures peut-on émettre :

- sur le sens de variation de la fonction g ;

- sur l'existence d'une asymptote Δ à (C) ;
- sur l'abscisse τ du point d'intersection I de (T) avec Δ.

3. Démontrer toutes les conjectures formulées en C-2.

Partie D – Etude de l'influence du choix du pas h suivant sa position par rapport à τ

1. Ecrire les équations donnant les abscisses x_n et les ordonnées y_n des points M_n pour un pas h (et non plus 0,2 comme au préambule).

2. a. Tracer la courbe (C) et tracer les nuages de points M_n que l'on obtient pour les valeurs suivantes de h *(on précisera pour chaque valeur de h, la valeur maximale de n que l'on peut prendre pour que le point M_n apparaisse sur le graphique)* :

$$* \; h=0,1\tau \; ; \qquad * \; h=0,6\tau \; ; \qquad * \; h=\tau \; ; \qquad * \; h=1,2\tau .$$

b. Commentez de manière précise les résultats obtenus.

c. Que se passe-t-il pour $h=\tau$? Démontrer ce résultat.

d. Y-a-t-il des valeurs de h qui vous paraissent inacceptables (*justifier votre réponse*) ?

3. Question « ouverte »

a. A l'aide du tableur conjecturer la valeur de h (à 10^{-2} près) à ne pas dépasser pour que la suite (y_n) soit croissante et possède tous ses termes dans l'intervalle $[0\,;2]$.

b. Prouver cette dernière conjecture.

5-5 : Fonction exponentielle par la méthode d'Euler

De nombreux phénomènes d'évolution sont modélisés par une fonction dérivable dont la dérivée est proportionnelle à la fonction elle-même. Il s'agit ici d'utiliser un tableur pour tracer la courbe représentative d'une telle fonction f vérifiant donc

$$f'=kf$$

(où k est un réel non nul donné) et la condition initiale $f(0)=1$. On dit que f est solution de l'équation différentielle $y'=ky$ (y représente ici une fonction). Lorsque k = 1, nous reconnaissons la fonction " exp ", abordée en cours.

Méthode d'Euler : f étant dérivable en tout réel a, on dispose de l'approximation affine de f au voisinage de a qui consiste à confondre, au voisinage de a, la courbe représentative de f avec sa tangente au point d'abscisse a.

Ainsi, pour tout réel h voisin de 0 : $f(a+h)\simeq f(a)+h\cdot f'(a)$.

Comme $f'=kf$, cette approximation peut s'écrire : pour $h\simeq 0$, $f(a+h)\simeq(1+kh)f(a)$.

Prenons par exemple $h=0,01$. Partant de $f(0)=1$, cette approximation est itérée pour obtenir de proche en proche les valeurs approchées de

$f(0,01)$: $f(0,01)\simeq(1+0,01k)f(0)$; $f(0,02)$: $f(0,02)\simeq(1+0,01k)f(0,01)$

et obtenir l'allure de la courbe de la fonction f.

Objectifs du TP :

- Obtenir des valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs de x appartenant à un intervalle I donné.
- Obtenir une courbe représentative "approchée" de la fonction f. On connait un point de la courbe C_f : le point $M_0(0\,;1)$.

Soit $h>0$ fixé. On considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = (1+kh)\,y_n \end{cases}.$$

Si $h \simeq 0$, nous savons que pour tout entier n, y_n est une valeur approchée de $f(x_n)$.

On utilise le tableur pour obtenir les valeurs de x_n et y_n et construire la suite des points $M_n(x_n\,;y_n)$ qui donneront une bonne approximation de la courbe C_f sur un intervalle donné, par exemple $I = [-3\,;3]$.

1. $k = 1$ et $h = 0{,}1$.

* Ouvrir un feuille de calcul du tableur Excel.
* Dans la cellule A1, écrire " k = ", puis dans la cellule B1 la valeur de k.
* Dans la cellule A2, écrire : " pas : h = " , puis dans la cellule B2 la valeur de h .
* Dans les cellules A4, B4 et C4, écrire respectivement : " n", " x(n) " et " y(n) ".
* Entrer les valeurs convenables dans les cellules A5 , B5 et C5.
* Entrer les formules correctes dans A6 , B6 et C6.
* Recopier ces formules jusqu'à la ligne 35.

A ce stade de la procédure, on obtiendra une courbe approchée de C_f pour $x \in [0\,;3]$. Pour prolonger les données saisies à l'intervalle $[-3\,;3]$:

* Sauter une ligne.
* Dans les cellules B37 et C37 , écrire respectivement : " 0 " et " 1 " .
* Dans les cellules B38 et C38 , entrer les formules permettant de diminuer x de 0,1 et d'obtenir la valeur de y correspondante.
* Recopier ces formules jusqu'à obtenir le nombre -3 dans une cellule B.....
* Sélectionner les cellules B5 et C67, choisir dans l'assistant graphique, « nuage de points », « nuage de points reliés par une courbe ».

2. Imprimer la courbe obtenue en lui donnant un titre.

3. Reprendre la question 1 avec différentes valeurs de k ($k = -1$; $k = 2$; ...).

4. Reprendre les questions 1 et 2 avec un pas $h = 0{,}01$.

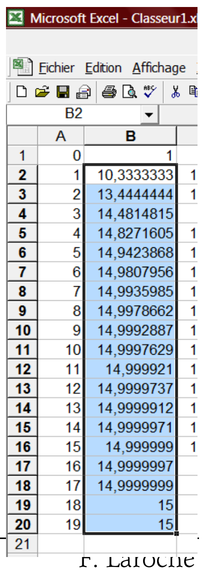
5-6 : Suite récurrente : une mise en route

L'objectif de cet exercice est double :

- En mathématiques : prendre conscience de l'effet de la valeur du premier terme d'une suite définie par récurrence.
- En TICE : continuer à apprendre à utiliser un tableur.

Première partie : les observations

On s 'intéresse à la suite u définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 10 \end{cases}$.



	A	B	
1	0	1	
2	1	10,3333333	1
3	2	13,4444444	1
4	3	14,4814815	
5	4	14,8271605	1
6	5	14,9423868	1
7	6	14,9807956	1
8	7	14,9935985	1
9	8	14,9978662	1
10	9	14,9992887	1
11	10	14,9997629	1
12	11	14,999921	1
13	12	14,9999737	1
14	13	14,9999912	1
15	14	14,9999971	1
16	15	14,999999	1
17	16	14,9999997	
18	17	14,9999999	
19	18	15	
20	19	15	
21			

1. Calculer, à l'aide d'un tableur, les vingt premiers termes de cette suite.

2.°Conjecturer alors le sens de variation et la limite de cette suite.

3. Nous allons maintenant modifier la valeur du premier terme u_0, par exemple, u_0= 30, en conservant la formule de récurrence.

Procédure

- Afin de ne pas perdre les informations, vous pourrez insérer une colonne pour les valeurs de n (cela servira pour le graphique plus tard).
- Taper la valeur 30 dans la cellule C1,
- Sélectionner la plage de formules B2:B20,

- recopier les formules vers la droite, avec la poignée de recopie située dans le coin en bas à droite de la partie sélectionnée

Vos conjectures concernant le comportement de la nouvelle suite, sont-elles les mêmes ?

4. En procédant de la même manière, faire plusieurs essais successifs (6 ou 7 en plus des deux déjà effectués) en changeant seulement la valeur du premier terme u_0, tout en conservant la même formule de récurrence.

5. Faire un graphique représentant (nuage de points) ces suites.

Procédure

- Sélectionner la plage de cellules contenant toutes les valeurs, et utilisez l'assistant graphique.

6. Observez ce graphique.

7. Citer trois valeurs de u_0 telles que la suite u est strictement croissante, trois valeurs telles que la suite u est strictement décroissante et une valeur telle que la suite u est constante.

Que peut-on dire de la limite de la suite, dans chaque cas ?

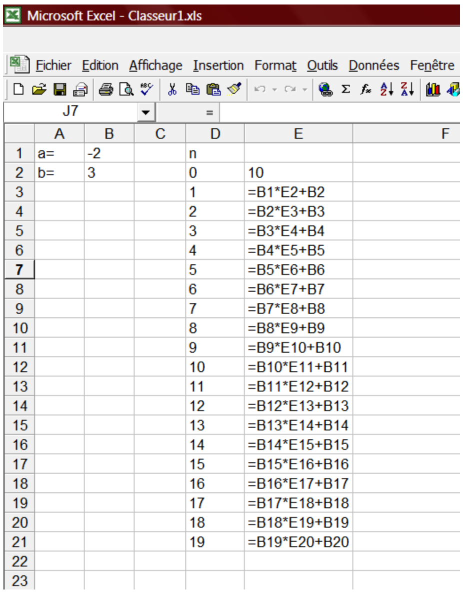
8. Prenez le temps de prendre conscience du fait que la suite u semble toujours monotone, et que, de plus, cela ne dépend que de la valeur de u_0 (la formule de récurrence étant toujours la même).

A quel intervalle semble devoir appartenir u_0 pour que la suite soit strictement croissante ? strictement décroissante ?

Deuxième partie

1. Nous allons modifier la feuille de calcul de façon à pouvoir calculer les valeurs des termes de la suite u définie par par son premier terme $u_{0,}$ qu'on pourra modifier, et par la formule de récurrence $u_{n+1}=au_n+b$, a et b pouvant être modifiés.

- Ouvrir la feuille 2 de votre classeur. L'image ci-contre montre le début de la procédure.



	A	B	C	D	E	F
1	a=	-2		n		
2	b=	3		0	10	
3				1	=B1*E2+B2	
4				2	=B2*E3+B3	
5				3	=B3*E4+B4	
6				4	=B4*E5+B5	
7				5	=B5*E6+B6	
8				6	=B6*E7+B7	
9				7	=B7*E8+B8	
10				8	=B8*E9+B9	
11				9	=B9*E10+B10	
12				10	=B10*E11+B11	
13				11	=B11*E12+B12	
14				12	=B12*E13+B13	
15				13	=B13*E14+B14	
16				14	=B14*E15+B15	
17				15	=B15*E16+B16	
18				16	=B16*E17+B17	
19				17	=B17*E18+B18	
20				18	=B18*E19+B19	
21				19	=B19*E20+B20	
22						
23						

- Vous avez compris que $u_0 = 10$.

- Vous reconnaissez dans la cellule E3 la formule qui permet de calculer u_1.

- Que se passe-t-il quand on recopie cette formule vers le bas ? - Obtient-on le résultat attendu ?

- Observez les formules contenues dans les différentes cellules de la colonne E.

- Quelle formule aimerait-on voir dans la cellule E4 ?

- Et dans la cellule E5 ?

Procédure

Pour fixer l'adresse d'une cellule dans une formule afin de la rendre insensible aux glissements dus à la recopie, on utilise le caractère $:

$B5 fixe la colonne B

B$5 fixe la ligne 5

B5 fixe à la fois la ligne et la colonne.

2. Corrigez votre formule et faites le bon calcul, dans la colonne E.

3. Faire un graphique représentant cette suite, n en abscisse et u_n en ordonnée.

4. Modifier la valeur de a. Observez le graphique qui s'actualise.

5. Observez le comportement de la suite, selon les valeurs de a, en particulier la convergence. Faire des conjectures liant les valeurs de a et la convergence de la suite.

Troisième partie : **les démonstrations des conjectures de la première partie**

1. Quelle(s) méthode(s) proposez-vous pour démontrer que .la suite définie au début de la première partie est croissante.?

2. Faire la démonstration.

3. Démontrer que la suite u est majorée.

4. En déduire qu'elle converge.

5. Quelle égalité doit vérifier la limite l de cette suite ? En déduire l.

5-7 : Problème du chien.

1. Un chien poursuit son maître.

La courbe du maître est $M(t)=\left(x(t), y(t)\right)$.

La position initiale du chien est $C_o(x_o, y_o)$.

Le rapport des vitesses du maître et du chien est $R=\dfrac{\textit{vitesse}\text{ chien}}{\textit{vitesse}\text{ maître}}$.

Quand le maître fait un « pas » le chien en fait un dans la direction du maître. A chaque pas le chien ajuste sa direction pour toujours viser son maître.

Si on note $\delta x_M = x(t+h)-x(t)$ et $\delta y_M = y(t+h)-y(t)$, où h est le temps écoulé entre deux pas du maître, montrer que δx_C et δy_C :

$$\begin{cases} \delta x_c = (x_M - x_C)\dfrac{R\sqrt{\delta x_M{}^2 + \delta y_M{}^2}}{\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}} \\ \delta y_c = (y_M - y_C)\dfrac{R\sqrt{\delta x_M{}^2 + \delta y_M{}^2}}{\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2}} \end{cases}.$$

Tracer la courbe du chien dans les cas où la courbe du maître est la suivante :

- un cercle ,
- l'axe des x (une droite)
- une hyperbole

Dans chaque cas, on fera varier le rapport des vitesses R : ($R < 1$, $R = 1$, $R > 1$, $R >> 1$).

2. On suppose que le chien est doué d'une vision hyperperformante et d'un corps suffisamment souple pour ajuster sa position à tout moment en direction de son maîmaître.

Déterminer les équations différentielles qu'il faut alors résoudre dans le cas où le maître décrit une droite.

Voir http://promenadesmaths.free.fr/fichiers_pdf/trajectoire_poursuite.pdf