Travaux pratiques Informatique

1. Initiation à Geogebra : configurations

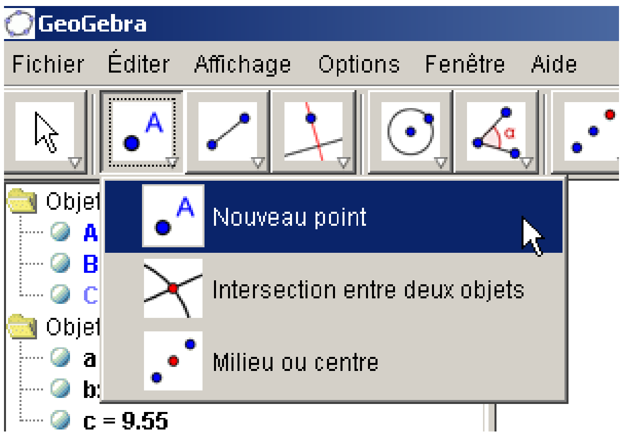
1-1 : Un triangle rectangle

<ins>A. Propriétés du triangle rectangle</ins>

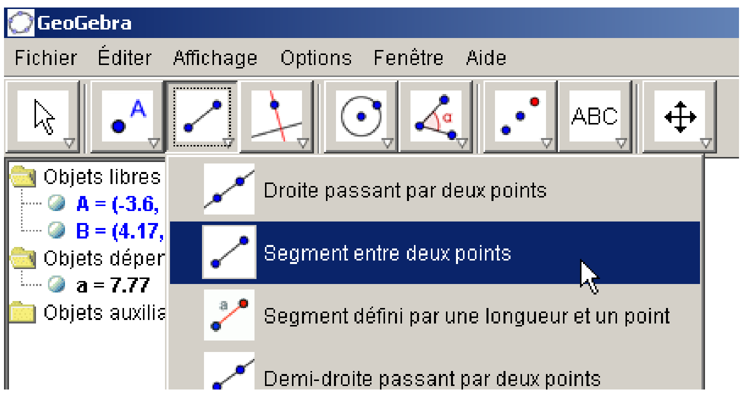
1. On se propose de construire un triangle *ABC* rectangle en *A* et de retrouver une propriété de ce triangle.

a. Ouvrez le logiciel Geogebra.

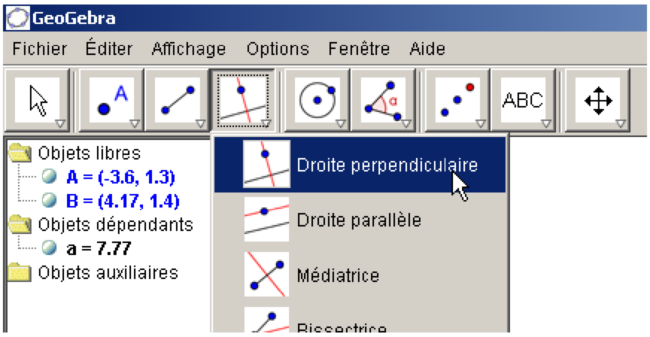
b. Sélectionnez l' icône « nouveau point » pour construire les points *A* et *B* .



c. Construire le segment [*AB*] : choisir dans le menu « segment entre deux points » ; cliquer ensuite sur *A* puis sur *B*.



d. Construire la perpendiculaire à $[AB]$ passant par A : approcher le curseur du segment $[AB]$, puis du point A.

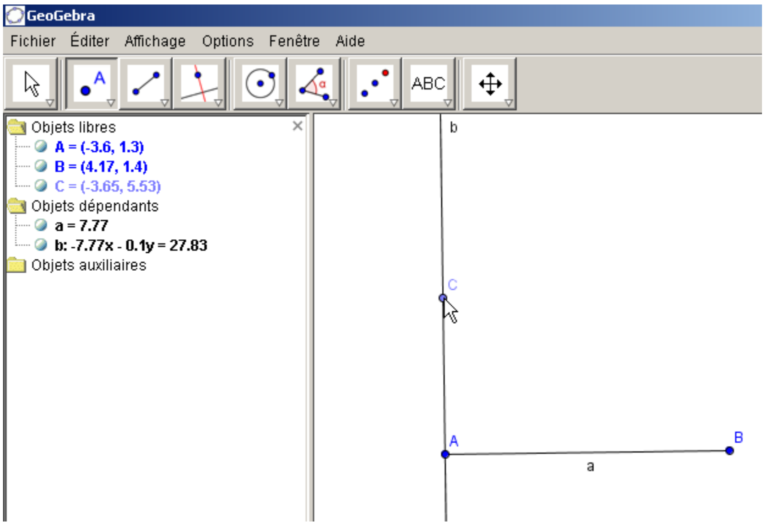


e. Créer un nouveau point C sur la droite obtenue précédemment.

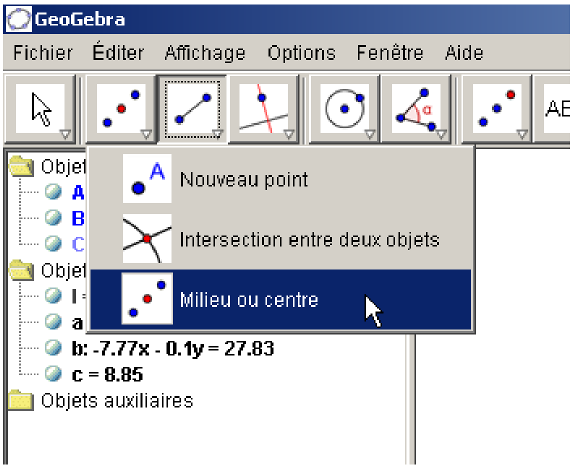
Choisir le mode « nouveau point », positionner le curseur sur la droite puis double cliquer.

Le fait de se positionner sur la droite fera du point C un point de cette droite.

Créer le segment $[BC]$.



f. Construire le milieu I du segment $[BC]$: rapprocher le curseur du segment $[BC]$ puis renommer le milieu que le logiciel appelle D par défaut (clic droit et « renommer »).



g. On se propose de comparer les longueurs des segments $[AI]$, $[IB]$ et $[IC]$. Définir ces segments et comparer leurs longueurs qui s'affichent dans la colonne de gauche. Rédiger votre réponse :

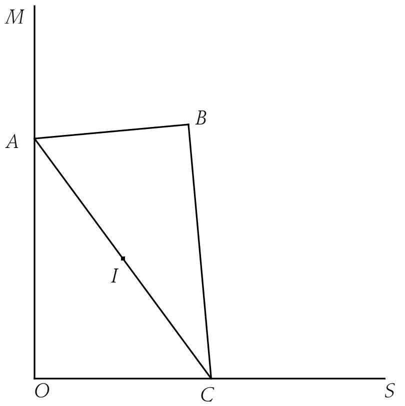
Bouger les points B et C : pour déplacer le point B, choisir l'icône « déplacer » (première en partant de la gauche) puis cliquer en maintenant appuyé sur le point B (le curseur se transforme en main).

La propriété mise en évidence précédemment est-elle encore vraie ?

Pouvez-vous le démontrer ? Vous pourrez utiliser la symétrie centrale de centre I.

1-2 : L'équerre

Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle en B est droit. Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$. Le point I est le milieu du segment $[AC]$. On s'intéresse aux lieux des points I et B.



1. Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec Geogebra, construire une figure dynamique illustrant la situation.

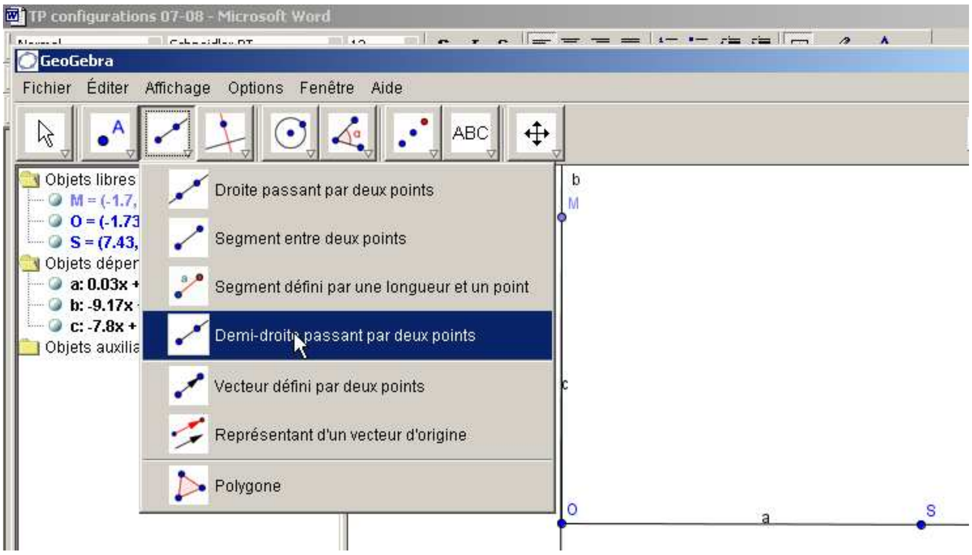
Appeler le professeur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand A décrit la demi-droite $[OM)$.

Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

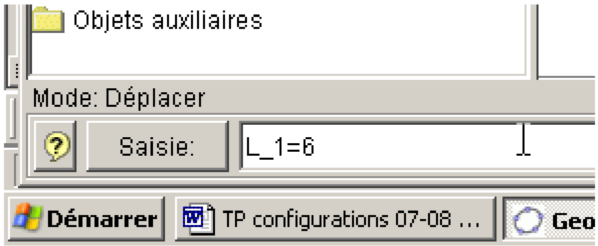
Aide pour la construction de la figure et la détermination du lieu.



1. Construire les demi-droites $[OS)$ et $[OM)$ (voir partie A).
2. Créer un point A sur la demi-droite $[OM)$ (voir partie A).

Il faut définir le point C. Il se trouve à l'intersection de deux courbes. Lesquelles ?

3. Pour construire le cercle de centre A et de rayon 6, entrer L_1=6 dans la fenêtre de « saisie » puis faire « entrée » sur votre clavier.

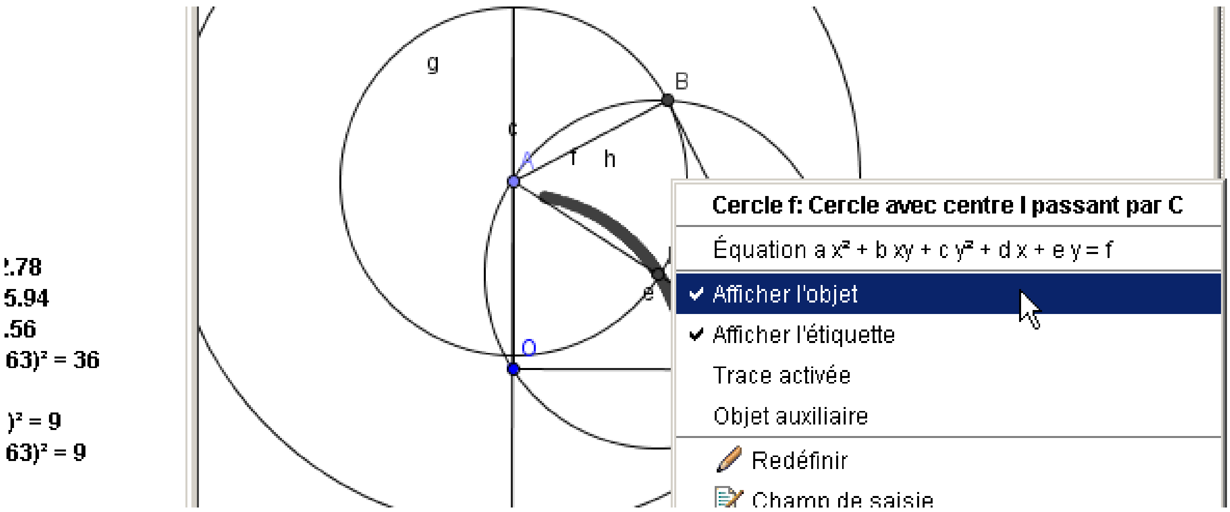


Il suffit ensuite de créer le cercle de centre A et de rayon L_1 (icône « Cercle (centre-rayon) »

Pour créer le point C comme intersection du cercle et de la demi-droite, il y a deux possibilités :

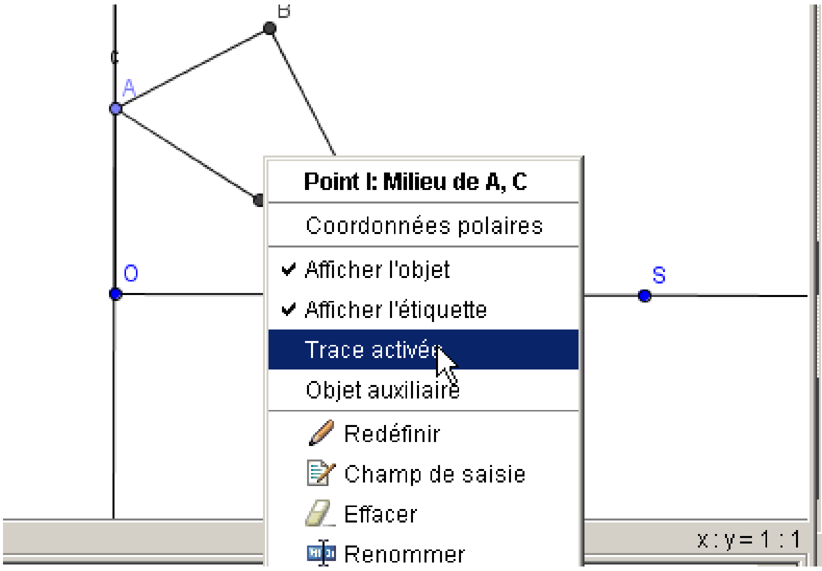
- création de C comme simple point d'intersection : en mode « nouveau point », il suffit de placer le curseur à l'intersection des deux courbes et de double cliquer.
- création de tous les points d'intersection possible : se placer en mode « intersection de deux objets », sélectionner le cercle (qui passe en gras) et la demi-droite(idem) ; le point est créé.

Le point B est également à l'intersection de deux courbes. Lesquelles ?



4. Construisez le triangle ABC ; après avoir fait un clic droit près d'un cercle, désactivez la fonction « afficher l'objet » pour supprimer les cercles de construction.

5. Pour observer le lieu du point I lorsque A décrit la droite [OM), activez la trace de ce point (clic droit près du point puis « trace activée ») .



(6) Pouvez-vous démontrer ce que vous venez de conjecturer ?

7. Sur quelle courbe se situe le point B lorsque A décrit la demi-droite $[OM)$? Pouvez-vous le démontrer ? (Indication : que vaut l'angle $\widehat{AOB}$ lorsque A est distinct de O ?)

2. Petits exos de géométrie

2-1 : Carré et triangles équilatéraux

Construire un carré $ABCD$. Sur le côté AB construire un triangle équilatéral ABI, I à l'intérieur du carré ; sur le côté BC construire un triangle équilatéral BCJ, J à l'extérieur du carré.

Que pouvez vous dire de D, I, J ?

2-2 : Quadrilatère de Varignon

On considère un triangle BOA quelconque. On construit sur les côtés OB et OA deux triangles rectangles isocèles de sommet O : BOE et AOC.

I, J, K et L sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$, $[CE]$ et $[EB]$.

1. Faire la figure.
2. Que pouvez-vous dire de IL et KJ ?

3. Comparez les longueurs BC et AE.

3. Que pouvez-vous dire que quadrilatère $IJKL$? Preuve ? (On pourra utiliser une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.)

2-3 : Triangle d'aire maximale

On considère un triangle isocèle de périmètre fixé, égal à 15.

Le but de cet exercice est de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie :

a. A l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et exactement égal à 15.

b. Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?

2. Démonstration : on note x la longueur BC et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ABC.

a. Dans quel intervalle le réel x peut il prendre ses valeurs ?

b. Soit H le milieu de $[BC]$, exprimer AH en fonction de x et en déduire que $\mathcal{A}(x)=\frac{x}{4}\sqrt{225-30x}$.

c. Résoudre le problème posé.

2-4 : La parabole *(M. Obadia)*

A. Enoncé

Dans un repère orthonormal, $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y=x^2$.

Un point M d'abscisse m $(m>0)$ sur $\mathcal{P}$ se projette orthogonalement en H sur l'axe (Oy) des ordonnées.

La perpendiculaire à (OM) passant par M coupe l'axe (Oy) au point I.

Objectif : Etudier la distance HI lorsque le point M décrit la parabole $\mathcal{P}$.

B. Partie expérimentale

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

2. Conjecturer le comportement de la distance HI lorsque le point M décrit la parabole $\mathcal{P}$.

Réponse :

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

C. Production écrite

Objectif : démonstration de la conjecture émise.

1. Démontrer que $\widehat{IMH}=\widehat{HOM}$.

2. Calculer $\tan\widehat{IMH}$ et $\tan\widehat{HOM}$.

3. Démontrer la conjecture émise dans la partie B.

2-5 : Lieu de points *(M. Obadia)*

A. Enoncé

Soit C un cercle de centre O et de rayon 4 cm et d une droite donnée dont la distance au point O est égale à 8 cm. On note H le projeté orthogonal du point O sur d.

Soit M un point variable de la droite d.

Les droites (MB) et (MC) sont les tangentes au cercle C issues du point M, en B et C respectivement.

La droite (BC) coupe (OM) en K.

Objectifs :

(1) Démontrer que la droite (BC) passe par un point fixe I lorsque le point M décrit la droite d.

(2) Déterminer l'ensemble auquel appartient le point K lorsque le point M décrit la droite d.

B. Partie expérimentale

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler le professeur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur la position du point I et sur la distance OI, lorsque le point M décrit le cercle C ?

Réponse :

Appeler le professeur pour valider les conjectures.

3. En utilisant la fonction $\boxed{\text{Trace}}$, quelles conjectures peut-on émettre sur :

a. la nature du lieu du point K lorsque M décrit le cercle C ?

b. les éléments caractéristiques de ce lieu ?

Réponse :

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

C. Production écrite

Objectif : démontrer partiellement ou totalement les conjectures émises.

On note I le point d'intersection de (BC) avec (OM).

1. Démontrer que la droite (MO) est la médiatrice du segment $[BC]$.
2. Démontrer que les triangles OKI et OHM sont semblables et que $OI \times OH = OK \times OM$.
3. Démontrer que les triangles OKB et OBM sont semblables et que $OK \times OM = 16$.
4. Calculer la distance OI et conclure pour la première conjecture.
5. Sur quelle « ligne » se déplace le point K lorsque M décrit le cercle C ?

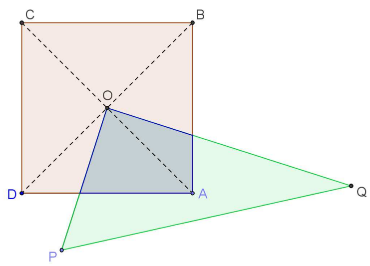
A. Enoncé

***2-6 :* Rotation** *(M. Obadia)*

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O et de côté 4 cm.

QOP est une équerre qui pivote autour du point O de manière que le segment $[OP]$ coupe $[AD]$ en M et $[OQ]$ coupe $[AB]$ en N.

On donne $OP = 3{,}5$ cm et $OQ = 6$ cm.



Objectif du TP : l'étude de l'aire du quadrilatère $AMON$.

B. Partie expérimentale

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler le professeur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'aire du quadrilatère $AMON$ et la valeur en cm² de cette aire ?
Réponse :

Appeler le professeur pour valider les conjectures.

C. Production écrite

Objectif : démontrer la conjecture émise.

Soit I le milieu de $[AD]$, J le milieu de $[AB]$ et r le quart de tour de sens direct qui transforme A en B.

1. Quelles sont les images des points D et I par r ?

2. a. Quelles sont les images par r :

- de la demi-droite $[OP)$?
- du segment $[AD]$?

b. En déduire l'image du point M par r.

3. Déterminer l'image du triangle MOI par r.

4. Terminer la démonstration de la conjecture énoncée dans la partie B.

2-7 : ***Point fixe*** *(M. Obadia)*

A. Enoncé

Soit C un cercle de centre O et de rayon r, $[AB]$ un diamètre de C et B' le symétrique de O par rapport à B.

Soit $[MN]$ un diamètre variable de C distinct de $[AB]$. On note Γ le cercle circonscrit au triangle MNC qui recoupe $[AB]$ en I.

Objectif : démontrer que le cercle Γ passe par un second point fixe (autre que B'), lorsque le diamètre $[MN]$ varie.

B. Partie expérimentale

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler le professeur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur ce second point fixe ?
Réponse :

Appeler le professeur pour valider la conjecture.

C. Production écrite

Objectif : démontrer la conjecture émise.

1. a. Démontrer que les triangles OIM et ONB' sont semblables.

b. En déduire que : $OI \times OB' = r^2$.

2. Démontrer alors que I est le point fixe cherché.

D. Pour aller plus loin

On note O' le centre du cercle Γ de rayon R, $\alpha\left(0 < \alpha < 180°\right)$ la mesure en degré de l'angle $\widehat{AOM}$ et β la mesure en degré de l'angle $\widehat{OO'B'}$.

Conjecturer :

- la valeur de α pour laquelle le rayon R est minimal.
- la valeur correspondante de β et la position du centre O' du cercle Γ.

3. ***Pentagone et nombre d'or***

Construction du pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle de centre O et rayon r, ayant un sommet A donné.	Consignes et questions

3-1 : Angles et côtés

1. L'angle au centre du Pentagone régulier est de 72° ou $\frac{2\pi}{5}$ rad et l'angle intérieur de 108° ou $\frac{3\pi}{5}$ rad.

Faire la construction dans un cercle trigonométrique.

2. Si a est la longueur du côté, d la longueur d'une diagonale et r le rayon du cercle circonscrit, on a :

$a = 2r\sin\frac{\pi}{5} = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = r\sqrt{3-\Phi} \approx 1{,}176r$;

$d = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = r\sqrt{2+\Phi} \approx 1{,}902r$.

Le rapport diagonale/côté est égal au nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Mesurer a et d sur la figure et effectuer les vérifications numériques des affirmations.

3-2 : Construction dite de Ptolémée

Alexandrie 85-165 après J.-C.

1. Pour construire un pentagone à la « règle et au compas » il suffit de savoir construire un angle au centre dont le cosinus est égal à $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Vérifier numériquement que

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

2. Pour un pentagone inscrit dans un cercle de centre O, ayant un sommet A donné on peut effectuer la construction suivante :

Tracer un cercle C_1 de centre O, passant par A. Placer $[AA']$ un diamètre et $[OB']$ un rayon perpendiculaire à $[AA']$.

K est le milieu du rayon $[OA']$, le cercle C_2 de centre K et de rayon KB' coupe le segment $[OA]$ en U.

La médiatrice de $[OU]$ passe par le milieu I de $[OU]$ et coupe le premier cercle C_1 aux points B et E qui sont deux sommets du pentagone. Le cercle de centre B passant par A recoupe C_1 en C. Le symétrique D de C par rapport à (AA') termine la construction du pentagone.

Faire la figure. On prendra O à l'origine et A au point (1, 0).

Montrer que

$$OI = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

On note J le point d'intersection de (CD) et (AA').

Que vaut OJ ?

De quels angles l'abscisse de J est-elle le cosinus ?

3. On trace les diagonales du pentagone : (AC), (BD), (CE), (DA), (EB). La figure obtenue s'appelle un pentagramme. Les points d'intersection de ces droites dessinent un nouveau polygone.

A, C, E, B, D dans cet ordre sont les sommets d'un polygone régulier étoilé appelé pentagramme. Ce pentagramme de Pythagore était le sceau secret de reconnaissance de la secte des Pythagoriciens dont les francs-maçons ont repris certains thèmes.

Faire une nouvelle figure.

Est-ce encore un vrai pentagone régulier ?

3-3 : Méthode des cercles tangents

Placer deux points O, A et le cercle C_1 de centre O, de rayon r, passant par A. A' est le symétrique de A par rapport à O. I est le milieu d'un rayon perpendiculaire au diamètre $[AA']$.

C_2 est le cercle de centre I et de rayon $\frac{r}{2}$. La droite $(A'I)$ coupe le cercle C_2 en P et Q. C_3 et C_4 sont les cercles de centre A' tangents à C_2. Le cercle C_3 est tangent intérieurement au cercle C_2 en P et le cercle C_4 est tangent extérieurement au cercle C_2 en Q. Le cercle C_3 coupe C_1 en B et E et le cercle C_4 coupe C_1 en C et D. Les points $ABCDE$ sont les sommets du pentagone cherché.

On rappelle que deux cercles sont tangents en un point M si les tangentes aux cercles en M sont identiques.

Faire la figure. Et effctuer les mesures nécessaires permettant de vérifier que l'on a bien un pentagone régulier.

3-4 : Construction de Dürer

« Albert Dürer (né à Nuremberg en 1471, mort en 1528) appartient, comme Léonard de Vinci, à cette génération de grands artistes, peintres, sculpteurs et architectes, pour lesquels la géométrie est non seulement un instrument d'analyse, mais un puissant moyen de perfectionnement. L'étude de la perspective le conduisit à la transformation des figures en d'autres figures du même genre. Et de là naquirent plusieurs méthodes géométriques, comme celle qui consiste à faire croître proportionnellement les ordonnées des points d'une figure, dans le dessin d'un profil dont on veut rendre les dimensions en hauteur plus facilement appréciables. Dürer maniait très habilement le compas pour tracer des ellipses et d'autres figures géométriques. Le pentagone de Dürer est un pentagone, construit avec une seule ouverture de compas ; mais d'autres géomètres ont démontré depuis que ce pentagone n'a pas tous les angles égaux et que sa figure n'est qu'approximative.»

Source : Ferdinand Hoefer, Histoire des mathématiques, Paris, Hachette, 1874, p. 337

Placer deux points A et B.

A partir de ce segment [AB] qui sera un côté du pentagone on trace cinq cercles de même rayon : le cercle de centre A passant par B, celui de centre B passant par A. Ces deux cercles se coupent en P et Q. Le cercle de centre P passant par A (et par B) coupe les deux premiers cercles en R et S, et le segment [PQ] en G.

La droite (SG) coupe le premier cercle en E et (RG) coupe le deuxième cercle en C. Le dernier point D se trouve à l'intersection des cercles de centre E passant par A et de centre C passant par B.

Faire la construction.

Le pentagone $ABCDE$ est-il régulier ?. A-t-il ses angles égaux ?

Construire un vrai pentagone régulier $ABC'D'E'$ de côté [AB]. Que peut-on dire de D et D' ?

3-5 : Les étoiles de Compostelle

Placer deux points libres M et N, puis le carré $MNPQ$. Le cercle de centre M passant par P coupe la demi-droite [MN) en O. La droite (OQ) coupe la diagonale [MP] du carré en C. Le cercle de centre O passant par C coupe [MN] en B. [BC] est un premier côté du pentagone.

Le cercle de centre B passant par C coupe [NM) en A, point du pentagone. Le cercle de centre C passant par B coupe [CQ) en D, quatrième point du pentagone. On termine le pentagone en trouvant l'intersection E des cercles de même rayon de centres A et D. Le pentagone $ABCDE$ a ses cinq côtés égaux. L'erreur sur les angles est de un à deux degrés.

Faire la construction.

Quelle est l'erreur sur les angles ?

4. Conjectures et démonstrations

4-1 : Autour de trapèzes

Un *trapèze* est un quadrilatère convexe qui a deux côtés opposés parallèles.

Voici un demi cercle de rayon 1 et de diamètre [CD].

On s'intéresse aux trapèzes ABCD inscrits dans ce demi cercle, admettant pour bases [AB] et (CD).

A. Constructions et conjectures

1. Constructions : construire la figure 1. La compléter en la figure 2 de telle façon que A puisse décrire l'arc $\overset{\frown}{DE}$.

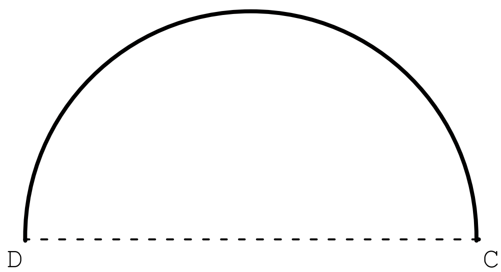
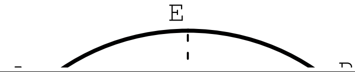


figure 1

Puis faire calculer et afficher par le logiciel le périmètre du trapèze ABCD avec 5 décimales.

Observer les variations de ce périmètre lorsque A décrit



l'arc $\overset{\frown}{DE}$.

2. Conjectures

a. Existe-t-il de tels trapèzes de périmètre 3,5 ?

b. Existe-t-il de tels trapèzes de périmètre 5 ? Si oui, combien ?

c. A quelles conditions sur p, existe-t-il de tels trapèzes de périmètre p ?

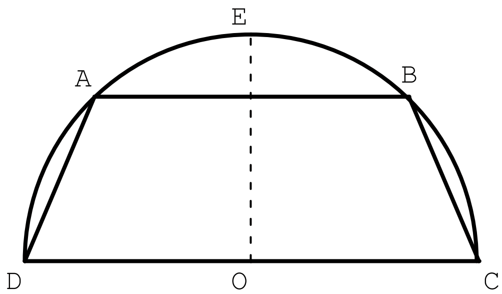


figure 2

B. Démonstrations

1. Démontrer la conjecture du 2. a.

2. On pose AD = a et AB = b.

a. Prouver avec la méthode de votre choix que $b = 2 - a^2$.

Indication : on appelle H le projeté orthogonal de A sur (CD). Calculer de deux façons différentes AH^2.

b. Exprimer p en fonction de a seulement et montrer que $p = -(a-1)^2 + 5$.

Démontrer la conjecture b).

c. A quel intervalle I appartient a ?

Etudier les variations de p sur I. Puis dresser le tableau de variation de p sur I.

Démontrer la conjecture c).

d. Lorsque $p = 4,99$, combien y a-t-il de solutions possibles ? Les préciser.

4-2 : Points remarquables dans le triangle & Droite d'Euler

A. Les points remarquables d'un triangle

Construire dans un triangle ABC le centre du cercle circonscrit O, les milieux I, J et K de [AB], [BC] et [CA], le centre de gravité G et l'orthocentre H. Construire le cercle circonscrit (C).

B. La droite d'Euler : conjecture à l'aide de la figure

1. Observer les déplacements des points O, G et H lorsqu'on déplace les sommets A, B ou C. Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Calculer $r = \frac{OG}{OH}$. Déplacer les points A, B, C. Que peut-on conjecturer sur la valeur de r ?

C. Démonstration

Compléter au fur et à mesure la figure sur l'écran et répondre aux questions.

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

1. Tracer les droites (CH) et (BA') et démontrer que ces droites sont parallèles.

2. Tracer le quadrilatère BA'CH et démontrer que c'est un parallélogramme. En déduire que I est le milieu de [HA'].

3. En déduire que G est le centre de gravité du triangle AHA'

4. Préciser la position du point G par rapport aux points O et H.

On appelle droite d'Euler la droite (OG).

4-3 : Le parallélogramme tournant

Un rectangle ABCD est tel que AB = 5 et BC = 3. M est un point du segment [AB]. On construit les points N, P et Q respectivement sur [BC], [CD] de [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.

On veut étudier la façon dont l'aire du quadrilatère MNPQ varie suivant la position du point M sur [AB], et savoir en particulier pour quelle position de M l'aire du quadrilatère MNPQ est minimale.

1. Conjectures

a. Faire une figure. On appelle x la longueur du segment [AM], a l'aire du parallélogramme.

b. Entre quelles valeurs doit varier x pour que les points N, P et Q correspondent à l'énoncé ? Quelles sont les coordonnées du point M' position extrême de M autre que A ? Placer M' et redéfinir M comme appartenant à [AM'].

c. Quelle est la valeur maximale de l'aire ? Pour quelle valeur de x ? Justifier.

d. Quelle est la valeur minimale de l'aire ? Pour quelle valeur de x ?

e. Placer le point F d'abscisse x et d'ordonnée a dans le repère. Créer le lieu de F quand M se déplace sur le segment [AM'].

f. Quelle est la valeur de l'aire pour $x = 1$? pour $x = 3$?

g. Quel est le sens de variation de a ?

2. Démonstration de la conjecture concernant la valeur minimale de l'aire

a. Soit x la longueur du segment [AM]. Calculer en fonction de x l'aire a du parallélogramme.

b. Montrer que a peut s'écrire $2(x-2)^2+7$.

c. Pour quelle valeur de x cette expression est-elle minimale ? Quelle est alors la valeur de a ? Démontrer la réponse.

4-4 : *Le parallélogramme tournant (2ème version, B. Brodin)*

Aire et périmètre d'un quadrilatère inscrit dans un rectangle

$ABCD$ est un rectangle de cotés $AB = 5$ cm et $BC = 3$ cm. k est un réel quelconque.

On fera afficher 5 décimales (*options*).

On place les points M, N, Q et P tels que $\overrightarrow{AM}=\frac{k}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{k}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{k}{5}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DQ}=\frac{k}{3}\overrightarrow{DA}$.

1. Construire la figure. On prendra une valeur quelconque pour k (taper k=2 par exemple dans la ligne de saisie) et on fera afficher k.

2. Entre quelles valeurs doit varier k pour que M, N, P et Q restent sur le pourtour du rectangle ? Régler le curseur k pour que cela soit bien respecté (*propriétés, mettre le pas à 0,01*).

3. Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.

On veut visualiser et étudier les variations de l'aire S et du périmètre L de $MNPQ$.

4. a. Placer un point S de coordonnées (k ; aire($MNPQ$)). A l'aide de la trace de S dresser le tableau de variation de S en fonction de k. Pour quelle valeur de k la fonction S est-elle minimale ?

b. Calculer l'aire des triangles AMQ et BMN en fonction de k et montrer que $S(k)=2\left[(k-2)^2+\frac{7}{2}\right]$.

Retrouver ainsi en les justifiant les résultats de la question 4. a.

c. Peut-on trouver graphiquement une position de M pour laquelle S est égale à la moitié de l'aire du rectangle $ABCD$? Vérifier votre résultat à l'aide d'un calcul algébrique.

5. a. Refaire la même séquence d'opérations qu'au 4. a. pour visualiser les variations du périmètre L en fonction de k.

b. Dresser le tableau de variation de L. Donner à 10^{-2} près la valeur de k pour laquelle la fonction L est minimale. On note k_0 cette valeur.

c. Donner l'expression algébrique de L en fonction de k.

d. Peut-on trouver une position de M pour laquelle L est égal à la moitié du périmètre du rectangle $ABCD$?

6. a. On considère le point Q' symétrique de Q par rapport à (AB). Que peut-on dire de Q', M et N lorsque $k=k_0$? Justifier votre constatation. Que vaut alors $Q'N$?

b. En utilisant le théorème de Thalès dans $AQ'MNB$, trouver la valeur exacte de k_0.

5. Lieux de points

5-1 : Avec des vecteurs

Dans le plan, ABC est un triangle quelconque.

On note K le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.

On s'intéresse au lieu (L) des points H quand C se déplace sur une droite parallèle à la droite (AB).

1. a. Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, faisant apparaître les points A et B, le point C sur une droite parallèle à la droite (AB), le triangle ABC, le point H et le point K.

Afficher la trace du point H quand C varie sur la parallèle à (AB).

b. Vérifier à l'aide du logiciel (la vérification par le calcul n'est pas demandée ici) l'égalité (e) :

$$\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}.$$

2. à partir de cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$; les points A et B sont donnés par leurs coordonnées : $A(-1\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ 1)$. Le point C est sur l'axe des abscisses et a pour abscisse un réel x.

a. Demander à nouveau le lieu (L) des points H.

b. Quelle en serait une équation ?

3. Vérifier la conjecture émise en traçant le lieu des points H grâce à son équation.

4. En admettant que K a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{2-x^2}{2}\right)$ et l'égalité (e) donnée à la première question, en déduire les coordonnées de H puis l'équation de (L).

5-2 : Avec des fonctions

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 8$, $AD = 4$ et $\widehat{BDA}=\dfrac{\pi}{2}$.

Soit M un point libre du segment $[AB]$. On pose $AM = x$, avec $x\in[0\,;8]$.

La parallèle à la droite (DB) passant par M coupe le segment $[AD]$ en N. On cherche la position de M afin que le triangle CMN, de base $[MN]$, ait une hauteur de même longueur que cette base.

1. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. a. Tracer la hauteur $[CH]$ relative à la base $[MN]$. Déterminer la nature du quadrilatère $BDNH$.

On pose $MN = f(x)$ et $CH = g(x)$.

3. a. Toujours en utilisant votre logiciel préféré, tracer en utilisant l'outil « lieu de points », pour $x\in[0\,;8]$, les courbes représentatives des fonctions f et g.

b. Trouver la (les) positions de M tel que $MN = CH$.

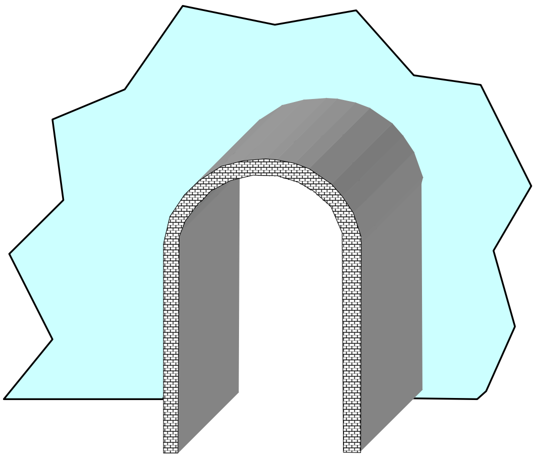
4. a. Exprimer $MN = f(x)$ en fonction de x. Exprimer $CH = g(x)$ en fonction de x

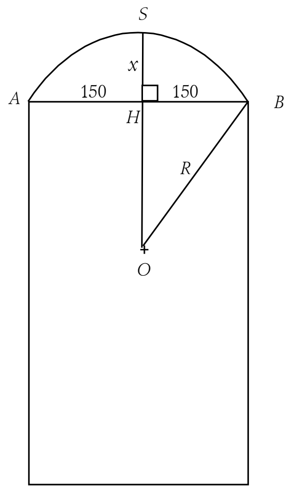
b. Représenter sur un même graphique, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g. Préciser leur ensemble de définition et leur sens de variation. Dresser leurs tableaux de variation.

c. Donner une valeur approchée de x tel que $MN = CH$.

5-3 : Arc et flèche

Une entreprise doit réaliser le plafond cintré d'une galerie selon le schéma ci-dessous.





La largeur de la galerie AB = 300 cm = 3 m.

Partie A

La flèche $x = SH$ dépend du rayon de cintrage R qui est le rayon de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ passant par S :

$$OA = OS = OB = R.$$

1. En considérant le segment $[OS]$, exprimer OH en fonction de R et de x.

2. En déduire l'expression développée de OH^2 en fonction de R.

3. Dans le triangle OBH, exprimer OH^2 en fonction de R.

4. Montrer qu'à partir des expressions obtenues aux questions précédentes, on obtient : $2Rx - x^2 = 150^2$.

5. En déduire que le rayon de cintrage R est donné en fonction de la flèche x par la relation :

$$R = \frac{x}{2} + \frac{11\,250}{x}.$$

6. Si la flèche x vaut 0,5 m, combien vaut le rayon ? Est-il possible que le rayon soit inférieur à 1,50 m ?

Partie B

1. Refaire la figure à l'aide de Geogebra : le point O doit être **libre** sur la médiatrice de $[AB]$; on appellera r la longueur OB et z la longueur SH.

2. Afficher le repère. Placer à l'aide de la ligne de saisie un point M de coordonnées (z, r).

Tracer le **lieu** des points M quand O parcourt la médiatrice de $[AB]$.

3. En lisant les coordonnées de M sur la figure compléter le tableau ci-dessous.

z	0	50	100	150	200	250	300	400	500
r									

4. Quelle est la valeur de z pour laquelle le rayon r est minimum ? Quelle est alors la position de M ?

5. Quand z devient grand, M semble se déplacer approximativement sur une droite. Tracer et donner une équation de cette droite.

Partie C

Pour des raisons esthétiques l'architecte décide que l'arche doit avoir la même longeur que le rayon.

1. Pour un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle α quelle est en fonction de R et α la longueur l de cet arc (on regardera les deux cas : angle en degrés puis angle en radians) ?

2. De même que précédemment placer un point N de coordonnées (z, l) et construire le lieu de N lorsque O parcourt la médiatrice de $[AB]$.

3. En lisant les coordonnées de N sur la figure compléter le tableau ci-dessous.

z	0	50	100	150	200	250	300	400	500
l									

4. Quelles sont les valeurs de z correspondant au problème de l'architecte ? Quelles sont alors les valeurs de R, de l, de α ?

6. Probabilités et statistiques

6-1 : TP EXCEL Nous voulons une fille !

Remarque technique : on utilise ici la fonction **=ALEA()** d'Excel. Cette fonction renvoie un nombre au hasard (aléatoire) compris entre 0 et 1 (1 non compris).

A chaque saisie d'une nouvelle cellule Excel recalcule toute la feuille, ce qui n'est pas très pratique parfois. Pour éviter cet inconvénient, faire « Outils », « Options », « Calcul » puis mettre « Recalcul » à « sur ordre » et décocher « recalcul avant enregistrement ».

Dorénavant vous devrez appuyer sur la touche « F9 » pour recalculer votre feuille.

Dans une petite ville (imaginaire bien sûr !), il y a 2000 couples. Ils ont tous au moins un enfant et tous veulent une fille. Cependant ils ne veulent pas plus de quatre enfants.

Ils appliquent donc tous la stratégie suivante : ils feront un autre enfant tant qu'ils n'ont pas une fille ou quatre garçons.

Nous admettrons que chacun de ces couples peut avoir autant d'enfants qu'il le désire, qu'à chaque naissance, ils ont autant de chance d'avoir un garçon qu'une fille et qu'ils n'ont pas de jumeaux.

1. a. Donner toutes les compositions de familles possibles dans cette ville :

b. Pensez-vous que le nombre de filles dans cette ville sera supérieur, inférieur ou à peu près égal à celui des garçons (expliquez…) ?

2. Nous allons simuler ce qui se passe pour 2000 couples et chercher des réponses aux questions suivantes :

- Quelle sera la proportion de garçons et de filles dans cette ville ?
- Quel sera le nombre moyen d'enfants par famille dans cette ville ?

a. Dans la cellule A1 d'une feuille Excel, mettre la formule : = SI(ALEA()<0,5;"G";"F")

Que simule-t-on ainsi ?

b. Recopier cette formule jusqu'en D1. Qu'a-t-on simulé dans les cellules A1 à D1 ?

c. Dans la cellule F1, mettre la formule : =A1. Dans la cellule G1, mettre la formule : =SI(F1=''G'';B1;'')
Que fait la formule précédente ?

d. Recopier la formule de G1 en H1 et I1. Qu'a-t-on simulé dans les cellules F1 à I1 ?

e. Recopier la ligne 1 jusqu'à la ligne 2000.

f. Dans les cellules A2002 à A2007 mettre les titres suivants :

Garçons	
Filles	
Total	
Prop Garçons	(pour proportion de garçons)
Prop Filles	(pour proportion de filles)
Enf / famille	(pour nombre moyen d'enfants par famille)

g. Dans la cellule B2002, mettre la formule : =NB.SI(F1:I2000;''G'')
Dans la cellule B2003, mettre la formule donnant le nombre total de filles dans les 2000 familles.
Dans la cellule B2004, mettre la formule donnant le nombre total d'enfants
Dans la cellule B2005, mettre la formule donnant la proportion de garçons
Dans la cellule B2006, mettre la formule donnant la proportion de filles dans la ville.
Observer les résultats en faisant plusieurs tests avec la touche « F9 ».
Les proportions de garçons et de filles semblent-elles égales ?

Dans la cellule B2007, mettre la formule donnant le nombre moyen d'enfants par couple.

Etude théorique

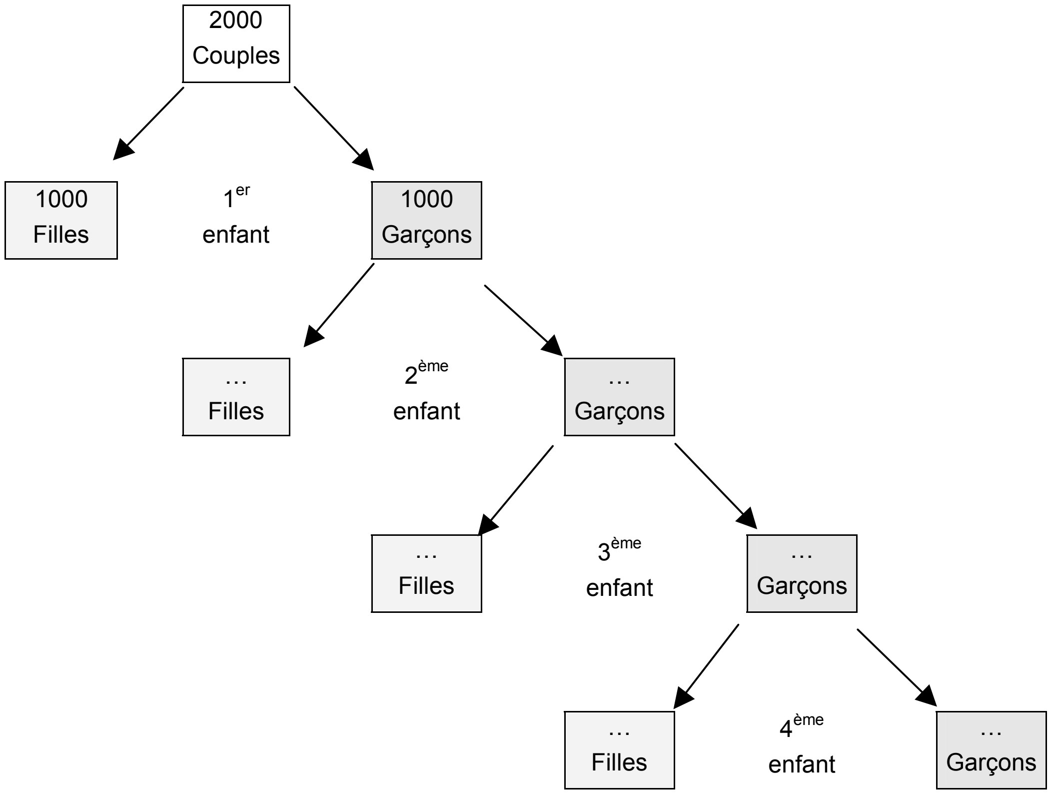
1. a. 2000 couples ont un premier enfant. A quel nombre théorique de naissances de filles peut-on s'attendre pour ce premier enfant ?

b. A quel nombre de couples avec un enfant peut-on s'attendre dans notre ville ?

c. 1000 couples ayant déjà un garçon ont un deuxième enfant. A quel nombre théorique de naissances de filles peut-on s'attendre pour ce 2ème enfant ?

d. Quel nombre de couples ayant deux enfants peut-on s'attendre dans notre ville ?

2.a. Compléter le schéma suivant, indiquant la répartition théorique des naissances pour les 2000 couples de notre ville :



b. Pour 2000 couples, donner la répartition théorique attendue :

Enfants	F	GF	GGF	GGGF	GGGG
Effectifs					

c. Déterminer :

- le nombre théorique de filles pour les 2000 couples ;
- le nombre théorique de garçons pour les 2000 couples ;
- le nombre théorique moyen d'enfants pour les 2000 couples.

Comparer la simulation faite au 2. à ces résultats théoriques.

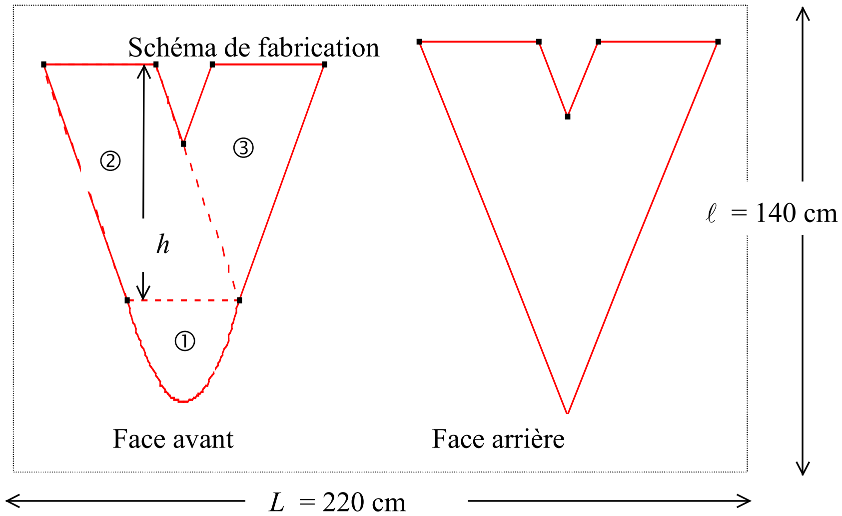
4. Refaire la simulation et l'étude théorique en supposant maintenant que les couples de la ville ont un autre enfant tant qu'ils n'ont pas une fille ou cinq garçons.

(Pour la simulation, dans le menu « Edition ; Déplacer ou copier une feuille », on peut cocher « Créer une copie » puis modifier la copie obtenue.)

7. Problèmes

7-1 : Un poncho très « fashion »

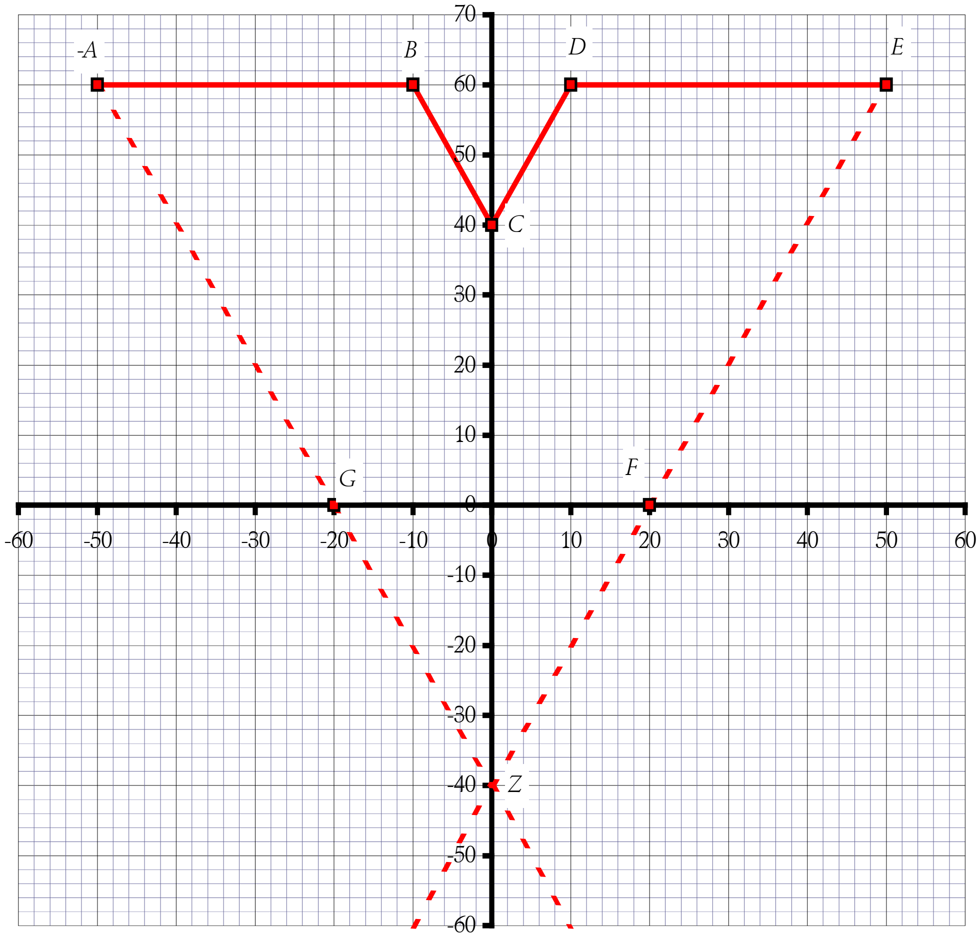
On réalise le patron d'un poncho en tissu dont le modèle figure ci-dessous.



Partie 1

Pour donner un côté plus «fashion» au poncho, la face avant sera découpée différemment de la face arrière.

La partie inférieure de la face avant est constituée d'un arc de parabole alors que sa partie supérieure reprend exactement le dessin de la face arrière. Tous les tracés demandés seront faits sur la figure ci-dessous.



Unités graphiques : sur chaque axe gradué, 1 unité représente 10 cm.

1. La partie inférieure de la face avant est constituée d'une parabole d 'équation $f(x)=ax^2+bx+c$ passant par les points $G(-20\ ;\ 0)$, $F(20\ ;\ 0)$, $S(0\ ;\ -25)$.

Déterminer les valeurs de a, b et c.

2. Soit la fonction définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par $f(x)=0{,}062x^2-25$.

a. Etudier les variations de f sur $[0\,;20]$ puis sur $[-20\,;0]$.

b. Dresser le tableau de variation de f et compléter le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous. Arrondir les valeurs approchées à l'unité.

x	– 20	– 15	– 10	– 5	0	5	10	15	20
$f(x)$									

c. Sur le repère ci-dessus, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$.

3. On note S le point d'abscisse $x_S=0$ de la courbe (C) et on donne les coordonnées des points $A(-50\ ;\ 60)$ et $E(50\ ;\ 60)$. Calculer la distance du point S à la droite (AE).

Partie 2

Pour éviter la déformation de l'encolure, on maintient celle-ci au moyen de lanières comme indiqué sur la photo ci-dessus. Soient les points : $B(-10\ ;\ 60)$; $D(10\ ;\ 60)$; $K(5\ ;\ 50)$ et $L(-5\ ;\ 50)$.

1. Placer les points K et L puis tracer les segments $[LD]$ et $[BK]$.

2. Donner les équations des droites (LD) et (BK).

3. On note M le point d'intersection des segments $[LD]$ et $[BK]$; donner ses corrodonnées. On donnera une valeur approchée entière de son ordonnée. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MK}$.

4. Calculer les longueurs MD et MK. Arrondir les valeurs au dixième.

5. Une contrainte esthétique impose que l'angle $\widehat{DMK}$ soit compris entre 60° et 70°. La contrainte est-elle respectée ?

Partie 3

Les points E et Z sont représentés sur la figure.

1. Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point Z.

2. Montrer que les abscisses des points d'intersection F et F', de la parabole (C) et de la droite (EZ) sont les solutions de l'équation $0,0625x^2 - 25 = 2x - 40$.

3. Vérifier que $0,0625x^2 - 2x + 15 = 0,0625\left(x^2 - 32x + 240\right) = 0,0625\left[\left(x - 16\right)^2 - 16\right]$.

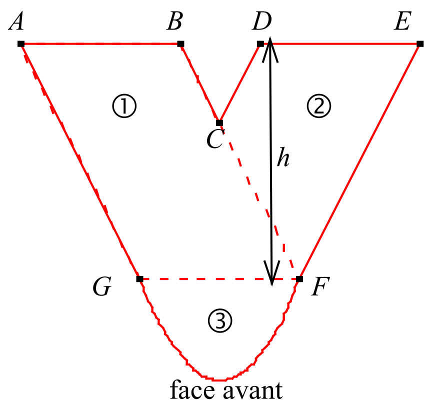
Résoudre l'équation $0,0625x^2 - 25 = 2x - 40$.

4. Calculer les coordonnées des points F et F'. Placer sur le repère le point F'.

Partie 4

La face avant du poncho est constituée de :

- un parallélogramme ① $ABFG$, le point G est le symétrique de F (20 ; 0) par rapport à l'axe vertical passant par C,
- un trapèze ② $DCFE$,
- une surface ③, délimitée par un arc de parabole et le segment $[GF]$.



1. Calcul de l'aire du parallélogramme ① ($ABFG$).

a. A partir du graphe déterminer, en cm, la mesure réelle de la base $[FG]$ du parallélogramme.

2. Déterminer graphiquement, en cm, la mesure de la hauteur h du parallélogramme relative à la base $[FG]$.

3. Calculer, en cm², l'aire du parallélogramme $ABFG$ qui est égale à $FG \times h$.

4. Déterminer l'aire du trapèze $DCFE$.

5. Donner une valeur approchée à 1 cm² près de l'aire de la partie ③.

Déterminer, en cm², l'aire totale de tissu nécessaire à la réalisation de la face avant du poncho.

Partie 5

La face arrière du poncho forme un « V » d'aire 4 800 cm². Lors de la coupe du poncho, les faces avant et arrière sont placées de manière à minimiser les pertes de tissu.

1. Calculer, en cm², l'aire totale de tissu nécessaire.

2. On positionne les deux pièces dans un rectangle. Quelles doivent être ses dimensions minimales ?

3. Faire un schéma. Dire pour la disposition choisie quel est le pourcentage de perte.