Travaux pratiques Informatique

1. Questions ouvertes

1-1 : Lieu de points

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que 2BC = 3AB.

Un point H et un point K sont mobiles respectivement sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle façon que 2BK = 3AH. On note I le milieu (mobile) du segment [HK].

1. Sur quel ensemble se déplace le point I lorsque H parcourt le segment [AB] et K le segment [BC] ? Justifier.

2. Le problème serait-il différent si le triangle ABC n'était pas rectangle ?

1-2 : Distance minimale

ABC est un triangle rectangle en A et M est un point de l'hypoténuse [BC]. Les perpendiculaires à [AB] et [AC] passant par M coupent [AB] en E et [AC] en F.

Où placer le point M pour que la distance EF soit la plus petite possible.

Faites une conjecture.

Démontrez ou invalidez votre conjecture.

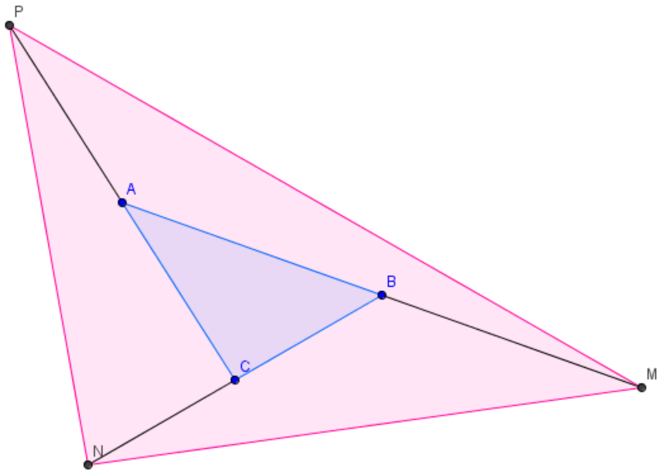
1-3 : Fonctions inconnues

Déterminer toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}$, pour tout y de $\mathbb{R}$, $f(x)f(y)-f(xy)=x+y$

1-4 : Médianes ?

A partir du triangle ABC, on construit les points M , N et P tels que A est le milieu de [PC] , B est le milieu de [AM] , C est le milieu de [BN].

Exprimer l'aire de MNP en fonction de l'aire de ABC.



1-5 : Droites d'un triangle

d_1, d_2, d_3 sont trois droites concourantes en un point G. Construire un triangle tel que ces trois droites en soient les médianes.

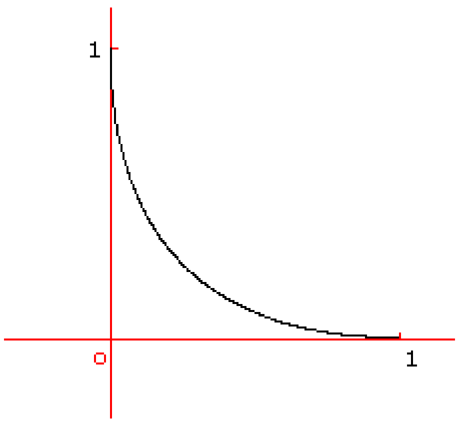
Pouvez-vous construire un autre triangle tel que ces mêmes trois droites en soient les médianes ? Quelles remarques faites-vous ?

Peut-on construire un triangle tel que les trois droites soient ses hauteurs ? ses bissectrices ? ses médiatrices ?

1-6 : 1S-TS banque exos 12/04

Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que n^k peut s'écrire comme somme de n entiers impairs consécutifs.

1-7 : Cercle ou pas ?



Soit f une fonction définie pour tout x de [0 ; 1] par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

On admettra que (C) est tangente aux deux axes de coordonnées aux points de coordonnées (1 ; 0) et (0 ; 1). (C) est-elle un arc de cercle ?

1-8 : Diagonales

Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe ?

1-9 : Lieu de points

ABC sont trois points non alignés du plan. M est un point variable sur (AB), (b) est la perpendiculaire à (AB) passant par C, (c) est la perpendiculaire à (AB) passant par M.

(C) et (AC) se coupent en D, (e) est la parallèle à (AB) passant par D, (e) et (b) se coupent en E, (BE) et (c) se coupent en P.

Quel est le lieu du point P ?

2. Fonctions et Courbes

2-1 : Parabole

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+1$.

1. Étudier le signe de ce trinôme.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa représentation graphique que l'on notera (P) à l'aide de GeoGebra.

3. Pour tout nombre m réel, on considère la droite (D_m) d'équation $y=-2x+m$.

a. Construire cette droite sur la figure précédente de telle sorte que l'on puisse faire varier le réel m.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite

b. Déterminer graphiquement le nombre de point d'intersection de (D_m) et de (P) suivant les valeurs de m.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

4. Discuter par le calcul le nombre de points d'intersection de (D_m) et de (P).

5. Donner les coordonnées du point d'intersection dans le cas où il est unique.

6. Lorsque (D_m) coupe (P) en deux points distincts A_m et B_m, on appelle I_m le milieu de $[A_m\ ;B_m]$. Soit E l'ensemble des point I_m quand m parcourt $\mathbb{R}$ tout entier.

a. Quelle semble être la nature de l'ensemble E ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture

b. Démontrer la conjecture précédente.

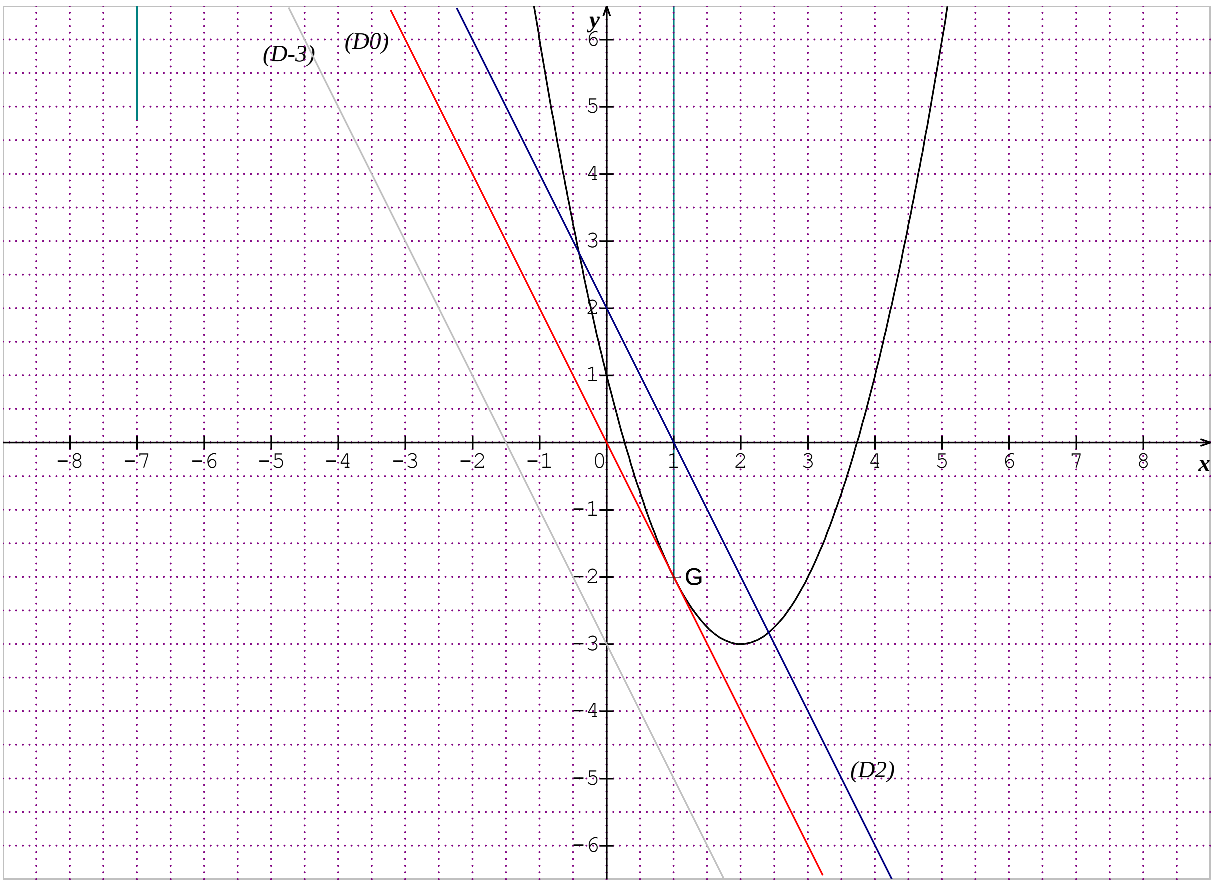
<u>Correction</u>

1. Calculons Δ : $\Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12$; comme $\Delta > 0$, alors l'équation $x^2-4x+1=0$ admet deux solutions : $x_1=\dfrac{4-\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$ et $x_2=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$. On obtient alors le signe de l'expression $3x^2+4x+1$:

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$3x^2+4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Comme $a=1$, alors la représentation graphique de f est une parabole ayant « les branches vers le haut », et le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Or $-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2}=2$ et $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{-12}{4}=-3=f(2)$, d'où :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-3	↗



3) D'après le graphique précédent :

• Si $m < 0$, il n'existe pas de point d'intersection de (D_m) et de (P).

• Si $m < 0$, (D_m) et de (P) se coupent en un seul point.

• Si $m > 0$, (D_m) et de (P) se coupent en deux points.

4) Les abscisses des points d'intersection de (D_m) et de (P) sont les solutions de l'équation $f(x)=-2x+m$.

Or $f(x)=-2x+m$ équivaut à $x^2-4x+1=-2x+m$, c'est-à-dire à $x^2-2x+1-m=0$.

Calculons Δ : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times(1-m)=4-4+4m=4m$.

• Si m < 0, alors $\Delta < 0$; on en déduit que l'équation $f\left(x\right) = -2x + m$ n'a pas de solution.

Il n'existe donc pas de point d'intersection entre $\left(D_m\right)$ et (P).

• Si m = 0, alors $\Delta = 0$; on en déduit que l'équation $f\left(x\right) = -2x + m$ a une solution double $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.

D'où, $\left(D_m\right)$ et (P) se coupent en un seul point, d'abscisse 1.

• Si m > 0, alors $\Delta > 0$; on en déduit que l'équation $f\left(x\right) = -2x + m$ admet deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{4m}}{2} = \frac{2-2\sqrt{m}}{2} = 1-\sqrt{m}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{4m}}{2} = \frac{2+2\sqrt{m}}{2} = 1+\sqrt{m}$

D'où, $\left(D_m\right)$ et (P) se coupent en deux points d'abscisse $1-\sqrt{m}$ et $1+\sqrt{m}$.

5. Le point d'intersection est unique lorsque $m = 0$, et il a pour abscisse 1 d'après la question précédente. Or $f\left(1\right) = -2$.

Par conséquent, lorsque m = 0, $\left(D_m\right)$ et (P) se coupent en un seul point G de coordonnées (1 ; −2).

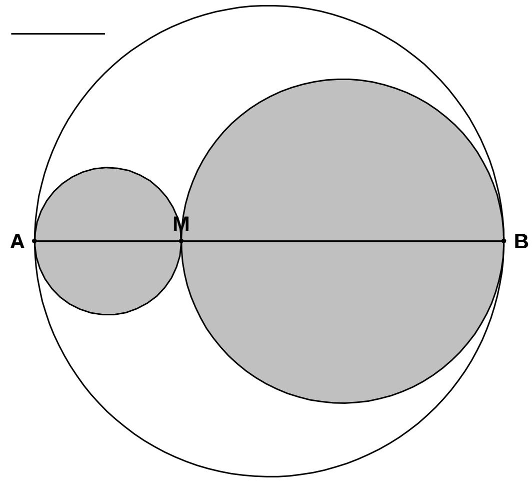
6. D'après la question 4., A_m a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{m} \\ -2\times\left(1-\sqrt{m}\right)+m \end{pmatrix}$ et B_m a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{m} \\ -2\times\left(1+\sqrt{m}\right)+m \end{pmatrix}$. Comme I_m est le milieu de $\left[A_m \,;\, B_m\right]$, alors :

$$\begin{cases} x_{\mathrm{I}_M} = \dfrac{\left(1-\sqrt{m}\right)+\left(1+\sqrt{m}\right)}{2} = 1 \\ y_{\mathrm{I}_M} = \dfrac{\left(-2\left(1-\sqrt{m}\right)+m\right)+\left(-2\left(1+\sqrt{m}\right)+m\right)}{2} = \dfrac{-4+2m}{2} = -2+m \end{cases}.$$

Comme A_m et B_m n'existent que si m est positif, alors $y_{\mathrm{I}_M} \geq -2$. En effet, dans le cas où $m = 0$, on a : $A_0 = B_0 = I_0$. Par conséquent, l'ensemble des point I_m quand m parcourt $\mathbb{R}$ est la demi-droite [Gy).

2-2 : Second degré et optimisation

On considère un point M sur le diamètre $\left[AB\right]$ d'un cercle. Il détermine deux cercles de diamètre $\left[AM\right]$ et $\left[MB\right]$. On pose $AB = 4$ et $AM = x$. Soit $A\left(x\right)$ l'aire de la surface non colorée.



1. Réaliser une figure à l'aide du logiciel GeoGebra.

2. Conjectures :

a. Quelle est la position du point M pour laquelle $A(x)$ est maximale ?

b. Existe-t-il une position de M pour laquelle $A(x)$ soit strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$?

c. Quelles sont les positions (si elles existent) de M pour lesquelles $A(x)$ est-elle inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$?

3. Montrer que l'aire $A(x)$ est définie par : $A(x)=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$.

4. Démontrer la conjecture de la question 2. a.

5. Justifier la conjecture de la question 2. b.

6. Déterminer les positions (si elles existent) de M pour lesquelles $A(x)$ estt inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$.

Correction

2. a. Figure 1.

Il semble que $A(x)$ soit maximale lorsque M est le milieu du diamètre $[AB]$.

b. Figure 2.

Il semble qu'il soit impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

c. Figure 3.

Il semble que les positions de M, pour lesquelles $A(x)$ soit inférieure à la moitié de l'aire des deux disques sont telles que $x\in[0\,;\,0,64]\cup[3,64\,;\,4]$.

3. L'aire $A(x)$ de la surface non colorée est définie sur $[0\,;\,4]$ par :

$$A(x)=\pi\times\left(\frac{AB}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{AM}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{MB}{2}\right)^2=\pi\times(2)^2-\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2.$$

D'où $A(x)=\pi\times\left(4-\frac{x^2}{4}-\frac{16-8x+x^2}{4}\right)=\pi\times\left(\frac{16-16+8x-2x^2}{4}\right)=\pi\times\left(\frac{8x-2x^2}{4}\right)=\pi\times\left(\frac{4x-x^2}{2}\right)$, par conséquent, pour tout réel x de $[0\,;\,4]$, $A(x)=\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)$.

4. $A(x)$ est un trinôme du second degré. Comme $a=-\frac{\pi}{2}$ (le coefficient du x^2 est négatif), alors la représentation graphique de A est une parabole ayant « les branches vers le bas », et le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Or $-\frac{b}{2a}=-\frac{2\pi}{-\pi}=2$ et $-\frac{\Delta}{4a}=2\pi$, d'où :

x	0		2		4
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	2π	$\searrow$	0

Par conséquent, A admet un maximum 2π atteint en $x=2$.
Par conséquent, la position de M pour laquelle $A(x)$ est maximale est donc le milieu du diamètre $[AB]$.

5. $A(x)$ est strictement supérieure à la somme des aires des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que : $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)>\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2$.

Or $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)>\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2$ équivaut à $x^2-4x+4<0$, c'est-à-dire à $(x-2)^2<0$; ce qui est impossible. Par conséquent, il est impossible de trouver une position de M vérifiant le problème.

6. $A(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ signifie que $\frac{\pi}{2}\left(-x^2+4x\right)\leq\frac{1}{2}\left[\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{4-x}{2}\right)^2\right]$, ce qui équivaut à $3x^2-12x+8\geq 0$.

Cherchons le signe de $3x^2-12x+8$: $\Delta=(-12)^2-4\times3\times8=144-96=48$; comme $\Delta > 0$, alors le trinôme admet deux solutions : $x_1=\frac{12-\sqrt{48}}{6}=\frac{12-4\sqrt{3}}{6}=2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ et $x_2=\frac{12+\sqrt{48}}{6}=\frac{12+4\sqrt{3}}{6}=2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

On obtient le signe de l'expression $3x^2-12x+8$ (positif à l'extérieur des racines) :

x	0		$2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$		$2+\frac{2}{3}\sqrt{3}$		4
$3x^2-12x+8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, les positions de M, pour lesquelles $A(x)$ est inférieure à la moitié de l'aire des deux disques de diamètre $[AM]$ et $[MB]$ sont telles que $x\in\left[0\ ;\ 2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right]\cup\left[2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\ ;\ 4\right]$.

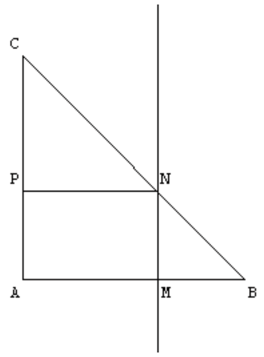
2-3 : Second degré et optimisation (F. Bergougnoux, C. Volland)

1. ABC est un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB=AC=6$. M est un point mobile du segment [AB] tel que $AM=x$ avec $x\in[0;6]$. N est à l'intersection de [BC] et de la perpendiculaire à [AC] passant par M ; P est le projeté orthogonal de N sur [AC].

On veut étudier le sens de variation de l'aire s du rectangle AMNP lorsque M se déplace sur [AB]. Pour cela, on introduit la fonction *f* associant à la distance AM l'aire s.

a. Conjecturer la (les) position (s) de M pour que l'aire soit égale à 8.

b. Conjecturer la (les) position (s) de M pour que l'aire soit maximale.



2. On veut visualiser la courbe (C) représentative de la fonction *f*. On notera Q un point courant de (C).

A l'aide de votre logiciel préféré tracez cette courbe (trace de Q puis lieu de points)… Reprendre alors les questions 1. a et 1. b.

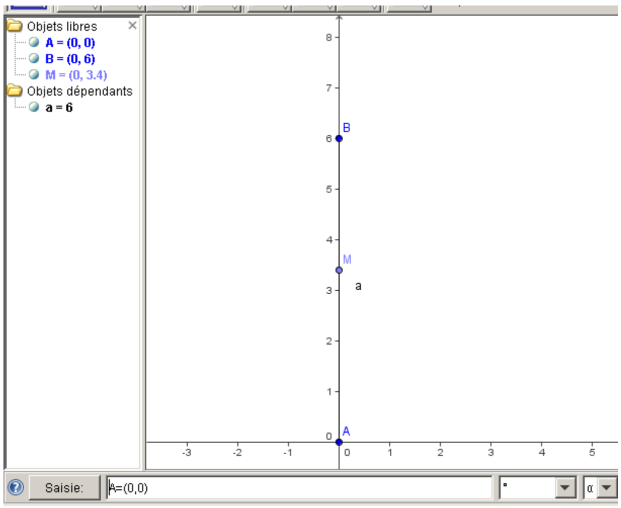
3. a. Exprimer MN en fonction de *x*. En déduire l'expression de $f(x)$, aire de AMNP, en fonction de *x*.

b. Tracer sur la figure 2 la représentation graphique de la fonction *f* et la comparer à la trace du point Q. Conclure.

4. Répondre de nouveau à 1.a. et 1. b. par le calcul.

2-4 : Second degré (R. Vidal / débutants)

I. On dispose de 12 mètres de clôture pour délimiter un enclos rectangulaire. Quelles dimensions donner à l'enclos pour que celui-ci délimite une aire maximale ?



A. Construction avec Geogebra :

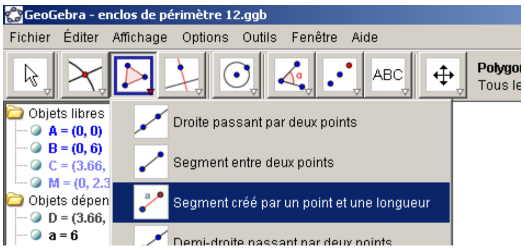
1. Dans la barre de saisie, entrez la formule « A=(0, 0) » ; créez de même le point B(0, 6) et le point M variable dans le segment [AB] (après avoir créé le segment).

Expliquez pourquoi créer ces points.

2. On se propose de construire le rectangle.

a. Que vaut sa longueur AC en fonction de la longueur AM ?

b. Construisez le segment [AC] en utilisant l'icône de menu ci-dessous



Vérifiez que lorsque M se déplace il en est de même de C.

c. Finissez la construction du rectangle. En utilisant l'icône « polygone » faites afficher son aire.

Pour quelle valeur de la longueur AM l'aire du rectangle semble-t-elle maximale ? A quelle figure géométrique cela correspond-il ?

B. Julia trouve, en utilisant Geogebra, que l'aire du rectangle semble maximale pour une valeur de AM égale à 2,99. Cette valeur vous semble-t-elle la bonne ? Essayons d'utiliser le tableur pour infirmer ou confirmer cette valeur.

a. Complétez avec le tableur un tableau donnant les valeurs de la longueur AM et de l'aire du rectangle : vous pourrez choisir pour AM des valeurs de 2,980 à 3,010 avec un pas de 0,001.

On rappelle la procédure pour remplir la colonne A : dans la cellule A2, entrez « 2,980 », puis dans A3, entrez la formule « = A2+0,001 » que vous ferez glisser avec la souris (clic gauche) vers le bas en sélectionnant le petit carré en bas à droite de la cellule.

Vous remplirez de même la colonne B en entrant la formule adéquate.

b. Essayez en utilisant le tableur de trouver une approximation plus précise du maximum. Vous choisirez un pas plus petit et avec un clic droit sur les axes du graphique vous pourrez modifier la fenêtre de celui-ci. Que constatez-vous ?

C. Démonstration mathématique

Appelez x la longueur AM. Dans quel intervalle x est-il situé ? Calculez l'aire $A(x)$du rectangle en fonction de x. Quelle est la nature de l'expression $A(x)$? En déduire le tableau de variations de la fonction $x \mapsto A(x)$ et répondre à la question de départ.

2-5 : Approche géometrique d'une courbe connue

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points A et B de coordonnées respectives $(-1\,;1)$ et $(1\,;1)$, puis un point M sur l'axe des abscisses. On appelle H l'orthocentre du triangle ABM.

Le but du travail est d'identifier la nature du lieu géométrique de H lorsque M parcourt l'axe des abscisses.

<u>1. Construction et conjecture grâce à un LGD</u>

a. Créer les points A et B. Placer un point M variable sur l'axe des abscisses puis construire le point H, orthocentre du triangle ABM.

b. Visualiser le lieu (L) de H lorsque M se déplace sur l'axe des abscisses. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la courbe (L) ?

c. Afficher les coordonnées du point H.

Quelle relation les coordonnées de H doivent-elles vérifier si la conjecture est valide ?

d. Afficher le carré de l'abscisse de H. Déplacer le point M : que constate-t-on ?

e. Peut-on, grâce à cette observation, valider ou invalider la conjecture ? Pourquoi ?

<u>2. Démonstration de la conjecture</u>

a. On appelle α l'abscisse du point M. Dans le triangle ABM, déterminer une équation de la hauteur issue de M, puis une équation de la hauteur issue de A.

b. En déduire les coordonnées du point H en fonction de α.

c. Quelle est la fonction f qui, à l'abscisse α de H, associe son ordonnée y ?

d. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre l'abscisse de H ? Sur quel ensemble est définie la fonction f ?

e. En déduire la nature de la courbe (L). La tracer sur la figure de la question 1.

<u>*Commentaires*</u>

Dans l'ensemble, les élèves ne connaissent les coniques que comme étant des représentations graphiques de fonctions. Cette approche est l'occasion de leur montrer que ces courbes peuvent aussi avoir une définition géométrique.

Prérequis : manipulation des fonctionnalités de base d'un LGD - équation d'une hauteur.

La réalisation de la figure permet de s'approprier les données de l'énoncé et sera une partie du compte-rendu.

<u>1. Conjecture avec un LGD</u>

Le point H semble se déplacer sur la parabole d'équation $y = x^2$, donc son ordonnée devrait être le carré de son abscisse. L'affichage des valeurs semble conforter la conjecture : toutefois ce travail à l'ordinateur ne valide aucun résultat. Il n'est qu'un élément supplémentaire pour penser que le lieu (L) est la parabole d'équation $y = x^2$.

2. Démonstration de la conjecture

a. La hauteur issue de M a pour équation $x=\alpha$.

La hauteur issue de A a pour vecteur normal $\overrightarrow{MB}(1-\alpha\,;1)$ et passe par $A(-1\,;1)$. Elle a donc une équation de la forme $(1-\alpha)x+y+c=0$ avec $-(1-\alpha)+1+c=0$ soit $c=-\alpha$.

Une équation de la hauteur issue de A est $(1-\alpha)x+y-\alpha=0$

b. Le point H a pour abscisse α et son ordonnée y vérifie l'équation $(1-\alpha)\times\alpha+y-\alpha=0$.

Le point H a donc pour coordonnées α et α^2.

c. L'ordonnée de H est donc l'image de son abscisse par la fonction carré : $f(\alpha)=\alpha^2$.

d. Le point M décrit tout l'axe des abscisses, donc l'abscisse de H décrit $\mathbb{R}$: la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

e. Le lieu (L) du point H lorsque M décrit l'axe des abscisses est la totalité de la courbe représentative de la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$: c'est donc la parabole d'équation $y=x^2$.

2-6 : ✿✿ Approche géometrique d'une courbe connue

Dans un repère orthonormé du plan, on considère le carré $ABCD$ avec $A\,(-1\,;\,0)$, $B(-1\,;\,1)$, $C(0\,;1)$ et $D\,(0\,;0)$ puis un point M sur l'axe des abscisses.

La droite (CM) coupe la droite (AB) au point N. Le point P est tel que le quadrilatère $AMPN$ soit un rectangle.

Le but du travail est d'identifier la nature du lieu géométrique de P lorsque M parcourt l'axe des abscisses.

1. Conjecture grâce à un LGD

a. Créer le carré $ABCD$. Placer un point M variable sur l'axe des abscisses. Construire successivement les points N et P.

b. Visualiser le lieu (L) de P lorsque M se déplace sur l'axe des abscisses. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la courbe (L) ?

c. Afficher les coordonnées du point P. Quelle relation les coordonnées de P doivent-elles vérifier si la conjecture est valide ?

d. Afficher l'inverse de l'abscisse de P. Faire varier M : que constate-t-on ?

e. Peut-on, grâce à cette observation, valider ou invalider la conjecture ? Pourquoi ?

2. Démonstration de la conjecture

a. On appelle α l'abscisse du point M. Déterminer une équation de la droite (CM).

b. En déduire les coordonnées du point N puis celles du point P.

c. Quelle est la fonction g qui, à l'abscisse α de P, associe son ordonnée y ?

d. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre l'abscisse de P ? Sur quel ensemble est définie la fonction g ?

e. En déduire la nature de la courbe (L). la tracer sur la figure de la question 1.

Commentaires

Dans l'ensemble, les élèves ne connaissent les coniques que comme étant des représentations graphiques de fonctions. Cette approche est l'occasion de leur montrer que ces courbes peuvent aussi avoir une définition géométrique.

Prérequis : manipulation des fonctionnalités de base d'un LGD - équation de droite.

1. Conjecture : le point P semble se déplacer sur l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}+1$, donc son ordonnée devrait être l'inverse de son abscisse, augmenté de 1.

L'affichage des valeurs semble conforter la conjecture : toutefois ce travail à l'ordinateur ne valide aucun résultat. On peut penser que le lieu (L) est l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}+1$.

2. Démonstration

a. La droite (CM) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{CM}(\alpha\,;-1)$ et passe par le point $C(0\,;1)$: une équation est $y=-\frac{1}{\alpha}x+1$ lorsque $\alpha\neq 0$.

b. Les coordonnées de N sont $(-1\,;\frac{1}{\alpha}+1)$, celles de P sont $(\alpha\,;\frac{1}{\alpha}+1)$.

c. L'ordonnée de P est égale à la somme de l'inverse de son abscisse et de 1 : $g(\alpha)=\frac{1}{\alpha}+1$.

d. Le point N et par conséquent le point P n'existent que si $\alpha\neq 0$, sinon (CM) est parallèle à (AB) ; ce qui correspond à M différent de l'origine du repère : la fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$.

e. Le lieu (L) du point P lorsque M décrit l'axe des abscisses, en étant différent de l'origine du repère, est l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}+1$ qui se déduit de l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$ par la translation du vecteur de coordonnées (0 ; 1).

2-7 : Approche géometrique d'une courbe connue

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle (C) d'origine O et de rayon 6 puis un point M sur ce cercle. Le point N est le point de l'axe des abscisses, distinct de O, tel que le triangle OMN soit isocèle en M. Le point K est le milieu du segment [MN].

Le but du travail est d'identifier la nature du lieu géométrique de K lorsque M parcourt le cercle (C).

<u>1. Conjecture grâce à un LGD</u>

a. Afficher le repère d'origine O puis créer le cercle (C) de centre O et de rayon 6.

Placer un point M variable sur (C). Construire successivement les points N et K.

b. Tracer le lieu (L) de K lorsque M se déplace sur (C).

Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la courbe (L) ?

S'agit-il de la courbe représentative d'une fonction ? Justifier la réponse.

c. Afficher les coordonnées du point K. Puis faire afficher la somme du carré de l'abscisse de K et de neuf fois le carré de l'ordonnée de K. Déplacer le point M. Que constate-t-on ?

<u>2. Etude et tracé de (L)</u>

a. On appelle α une mesure (en radians) de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$.

Déterminer en fonction de α les coordonnées du point M, puis celles du point N.

b. En déduire les coordonnées (x ; y) du point K.

Vérifier qu'elles sont solutions de l'équation $x^2+9y^2=81$.

c. Montrer que si K(x ; y) appartient à (L) alors les points $K_1(x\,;-y)$ et $K_2(-x\,;y)$ appartiennent aussi à (L). Qu'en déduit-on pour la courbe (L) ?

d. Montrer que la restriction de (L) au quadrant $x\geq 0, y\geq 0$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0, 9] par $f(x)=\frac{1}{3}\sqrt{81-x^2}$.

e. Etudier les variations de f sur l'intervalle [0, 9].

f. Tracer (L) en expliquant les différentes étapes de sa construction.

3. Produit scalaire

3-1 : Périmètre et aire d'un triangle

On connaît les 3 formules d'Al-Kâshi reliant côtés et angles d'un triangle : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, etc. ainsi que la formule de l'aire $\mathcal{A}$ et des sinus : $\mathcal{A}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ca\sin\beta$.

La question est de savoir si on peut trouver une relation « simple » entre $\mathcal{A}$ et les côtés a, b, c.

1. En écrivant par exemple que $\sin\gamma = \sqrt{1-\cos^2\gamma}$ et en utilisant Al-Kâshi, montrer que

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)} = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où p est le demi-périmètre du triangle.

2. Retrouver la formule en coupant votre triangle en deux triangles rectangles.

3. Peut-on trouver une formule semblable pour un quadrilatère convexe ?

4. Tester la formule sur des triangles de formes variées : regarder particulièrement les triangles très pointus ou très aplatis.

5. Trouver un triangle dont les côtés diffèrent d'une constante k (soit a, $a+k$, $a+2k$ par exemple) et dont l'aire t est fixée.

3-2 : ❀ Ensemble de points et produit scalaire

On donne deux points A et B tel que $AB = 4$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 12$ à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

<u>1. Construction de la figure</u>

a. Faire apparaître le repère pour la construction de A et B.

b. Créer les points A et B de coordonnées respectives $(0\,;0)$ et $(4\,;0)$.

c. Construire un point M variable puis les segments $[MA]$ et $[MB]$.

d. Créer la valeur numérique p qui représente le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Faire afficher cette valeur avec deux décimales.

<u>2. Conjecture d'une réponse</u>

a. Déplacer le point M dans le plan et observer pour chaque position de M la valeur de p. On peut visualiser quelques positions de M pour lesquels p est égal à 12. Conjecturer l'ensemble des points M cherché.

b. Il existe deux points E et F de l'axe des abscisses appartenant à l'ensemble cherché. Lesquels ? Pourquoi ? Justifier.

c. Pour chaque position de M, créer la valeur a de l'angle géométrique $\widehat{EMF}$. Faire afficher cette valeur avec une décimale. Déplacer le point M et observer simultanément les valeurs de p et de a : que semble valoir a lorsque $p = 12$?

d. En déduire l'ensemble des points demandés.

<u>3. Démonstration</u>

Soit I le milieu de $[EF]$.

a. Exprimer $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{IA}$.

b. Démontrer la conjecture émise sur l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 12$.

<u>4. Construction de l'ensemble de points</u>

a. Construire l'ensemble des points trouvés en question 3.c.

b. Plus généralement, si k est un réel quelconque l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ est-il toujours un cercle ?

3-3 : ❀❀ Inversion (M. Chevalier)

(C) est un cercle de centre O et de rayon 4, (d) une droite donnée dont la distance à O est 8. La perpendiculaire à (d) passant par O coupe (d) en H.

M est un point variable de (d). (MB) et (MC) sont les tangentes à (C) issues de M.

La droite (BC) coupe (OH) en I et (OM) en K.

A. Que se passe t- il lorsque M décrit la droite (d) ?

B. Passons à la démonstration :

1. Montrer que $OI \times OH = OK \times OM$.
2. Montrer que $OK \times OM = 16$.
3. En déduire OI et conclure.
4. Sur quel ensemble de points se déplace le point K lorsque M décrit la droite (d) ?

3-4 : Carré et Triangle (M. Obadia)

Objectif: étudier la nature d'un triangle variable.

A. Partie expérimentale

Soit $ABCD$ un carré de centre O et M un point variable sur la diagonale $[AC]$. On note I et J les projetés orthogonaux du point M sur $[AB]$ et $[BC]$ respectivement. On souhaite déterminer la nature du triangle OIJ.

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler l'examinateur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature du triangle OIJ lorsque le point M décrit le segment $[AC]$?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

B. Production écrite

On se propose de déterminer la nature du triangle OIJ par deux méthodes différentes.

1. Méthode géométrique

a. Démontrer que : $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB}$.

b. En notant $AI = m$ et en utilisant les relations d'Al-Kashi, montrer que $OI = OJ$.

c. Conclure sur la nature du triangle OIJ.

2. Méthode analytique

Dans le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, on note $M(m\,;m)$ avec $m \in [0\,;1]$.

En utilisant les coordonnées, démontrer la conjecture énoncée dans la partie A.

3-5 : Triangle et Carrés (M. Obadia)

Objectif: étude d'une configuration.

A. Partie expérimentale

Soit BOA un triangle non aplati. Extérieurement au triangle BOA, on construit les carrés directs $BAIN$ et $BEUO$.

On considère les droites (AE) et (ON) et enfin le point K milieu du segment $[EN]$.

1. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler l'examinateur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. En faisant varier le triangle BOA :

a. quelle conjecture pouvez-vous faire sur les droites (AE) et (ON) ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

b. Que représente la droite (BK) pour le triangle BOA ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

B. Production écrite

1. Comparer les angles $\widehat{EBN}$ et $\widehat{OBA}$ puis démontrer que $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$.
2. Démontrer alors la conjecture énoncée dans la question A.2.
3. Montrer que $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$.
4. Montrer que $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$. Confirmer alors la conjecture faite à la question A. 3.

4. *Barycentres*

4-1 : Lieux de points

Dans le plan, on donne les point O, A, B et C non alignés.

À chaque point M du plan on associe l'unique point M' défini par l'égalité $\overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+1,5\overrightarrow{MC}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble des points M' du plan tels que $\overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+1,5\overrightarrow{MC}$ lorsque M décrit un cercle donné.

A. Conjecture à l'aide d'un logiciel

1. a. Construire une droite (D) quelconque.

b. Déterminer alors le lieu des points M' lorsque M parcourt (D).

2. a. Construire un cercle (L) quelconque.

b. Déterminer alors le lieu des points M' lorsque M parcourt (L).

3. Que pensez-vous de la nature de la transformation f qui transforme M en M' ?

B. Approche de la démonstration

1. Construire le barycentre G des points pondérés (A ; 4), (B ; −3), (C ; 1,5).

2. Que pouvez-vous dire des vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GM'}$?

3. Conclure.

C. Généralisation

1. Reprendre les questions précédentes avec $\overrightarrow{MM'}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

2. Reprendre les questions précédentes avec $\overrightarrow{MM'}=a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}$.

4-2 : Avec des barycentres

Dans le plan P, on donne quatre points O, A, B et C et un cercle (Γ) de centre O.

Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ). On associe au point M l'unique point M' du plan P défini par l'égalité : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$.

Il s'agit de déterminer le lieu géométrique (L) du point M' lorsque le lieu géométrique du point M est le cercle (Γ).

1. a. A l'aide d'un logiciel de géométrie plane construire les points O, A, B et C, le cercle (Γ) et un point libre M sur ce cercle.

b. Construire le point M' associé à M.

c. En observant plusieurs positions du point M faire une conjecture sur la nature du lieu géométrique du point M'.

2. a. Trouver une relation simple entre les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM'}$ où I est un point à déterminer.

b. Déterminer le lieu géométrique (L) du point M'.

5. *Suites*

5-1 : *Somme d'entiers*

A - Somme des n premiers entiers naturels impairs

On considère la suite (I_n) définie, pour tout entier naturel non nul, par : I_n = 1 + 3 + …. + (2n − 1).

1. Conjecture avec un tableur

a. Créer les colonnes A et B jusqu'à n = 30.

b. Quelle est la formule à entrer en C3 ?

c. Recopier vers le bas la cellule C3 jusqu'à n = 30.

d. Conjecturer l'expression de I_n en fonction de n.

	A	B	C	
1	n	2n - 1	I_n	
2	1	1	1	
3	2	3	4	
4	3			

2. Démonstration

Démontrer la conjecture faite précédemment.

B - Découvrir une égalité

On considère les deux suites (S_n) et (P_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ et $P_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

	A	B	C
1	n	S_n	P_n
2	1	1	1
3	2	3	
4	3		
5			

1. Conjecture avec un tableur

En suivant la disposition ci-contre quelle conjecture faites-vous ?

2. Démonstration

a. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, $P_n = P_{n-1} + n^3$.

b. La suite (U_n) est définie, pour tout entier naturel non nul, par : $U_n = S_n^2$.

Exprimer U_n en fonction de n.

c. Vérifier l'égalité $U_1 = P_1$ et que, pour tout entier $n \geq 2$, $U_n = U_{n-1} + n^3$

d. On admet alors que les suites (U_n) et (P_n) sont égales. En déduire la conjecture émise.

5-2 : Suite définie par une relation de récurrence

(u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	
4	2	
5		

1. Conjecture avec un tableur :

a. Calculer u_n jusqu'à $n = 30$.

b. Faire apparaître les valeurs de u_n sous forme de fraction.

c. Conjecturer une expression donnant, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

2. Démonstration

a. (v_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

b. Démontrer la conjecture faite à la question 1.

5-3 : Recherche de solution approchée d'une équation du type f(x) = 0 par dichotomie.

Situation et principe :

> f est une fonction définie sur un intervalle I.
>
> Il arrive parfois que l'on sache que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule (par exemple par application du théorème des valeurs intermédiaires) sans être capable de calculer cette solution de façon précise.
>
> Il existe plusieurs *algorithmes* permettant de donner des encadrements (de plus en plus fins) de cette solution. L'un de ces algorithmes est celui de la *dichotomie*. (En grec, dichotomie signifie « couper en deux »).
>
> La méthode sera ici présentée sur un exemple.

Énoncé :

On considère le cas de l'équation $\cos x = x$ avec $x \in [0 ; \pi]$. On définit la fonction f sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = x - \cos x$. On doit donc résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1. On pose $a_0 = 0$ et $b_0 = \pi$. On note $I_0 = [a_0\,; b_0]$.

a. Calculer $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ puis $f(c_0)$. Déterminer alors si la solution α appartient à $[a_0\,; c_0]$ ou si elle appartient à $[c_0\,; b_0]$. On note $I_1 = [a_1\,; b_1]$ l'intervalle choisi.

b. Calculer $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ puis $f(c_1)$. En procédant comme au 1. a. en déduire le nouvel intervalle $[a_2\,; b_2]$ dont l'amplitude est égale à la moitié de celle de $[a_1\,; b_1]$, auquel appartient α.

2. En poursuivant le procédé amorcé à la question 1. b., on définit sur $\mathbb{N}$ les suites (a_n), (b_n) et (c_n) telles que $\alpha \in [a_n\,; b_n]$ et $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

3. Sur tableur, préparer une feuille de calcul sur le modèle suivant :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	NOMS	des auteurs	du fichier					
2								
3	n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$	amplitude de l'intervalle $[a_n, b_n]$
4	0							

Aide sur le tableur :

Vous allez être amenés à utiliser la fonction **SI** du tableur dont voici la syntaxe :

=SI(condition ; valeur à afficher si VRAI ; valeur afficher si FAUX)

Exemple : En saisissant

	A	B
1	1	=SI(A1>1,5;2;3)
2	2	=SI(A2>1,5;2;3)

, on obtient :

	A	B
1	1	3
2	2	2

.

Pour régler le **format d'affichage d'un nombre** :

Sélectionner le(s) nombre(s) concernés, cliquer sur *Format, cellule, nombres*. Choisir alors le format qui convient.

a. Remplir les cellules B4 et C4. Entrer les formules adéquates dans les cellules D4, E4, F4, G4 et H4.

b. Dans la cellule B5 : =Si(E4*G4≤0 ;B4 ;D4) ;

c. Que doit-on écrire dans la cellule C5 ?

4. Travail sur papier :

a. Quelles conjectures peut-on énoncer à propos des suites (a_n) et (b_n) ?

b. Proposer une démonstration validant ces conjectures.

5-4 : Le nombre d'or (B. Galasso)

Les questions Q_1, Q_2, … sont à rédiger classiquement sur une copie.

Les questions T_1, T_2, … sont à traiter à l'aide d'un tableur et à faire vérifier par le professeur.

1ère partie : définition du nombre d'or

Le nombre d'or est le nombre irrationnel noté par la lettre grecque φ (prononcer phi) et égal à $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Q_1. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près du nombre d'or φ.

T_1. Donner une valeur approchée à 10^{-12} près du nombre d'or φ.

2ème partie : construction géométrique du nombre d'or

Construire un carré ABCD de côté 1 et marquer le milieu I de [AB].
Tracer le cercle de centre I et de rayon IC ; il coupe la demi-droite [AB) en E. Construire le rectangle AEFD.

Q_2. Calculer la valeur exacte de IC puis démontrer que $AE = DF = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

NB : le rectangle AEFD est appelé ***rectangle d'or*** *car le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au nombre d'or.*

3ème partie : le nombre d'or solution d'une équation

Q_3. Montrer que le nombre d'or φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Q_4. Démontrer alors que l'inverse de l'opposé de ce nombre φ est aussi solution de cette équation.

4ème partie : Fractions en cascade

On considère la suite de fractions : $F_1 = 2$; $F_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $F_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$; $F_4 = 1 + \frac{1}{1+F_3}$; ...

Q_5. Simplifier ces fractions et en donner une valeur approchée à 10^{-6} près.

Q_6. Reprendre les calculs en remplaçant 2 par 1.

T_2. Sur un tableur, saisir un nombre A positif dans la cellule A1.

Dans la cellule A2, marquer « = 1 + 1/A1 », puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 30.

Observer les décimaux obtenus et comparer au nombre d'or.

NB : On demandera l'écriture des nombres décimaux avec 12 décimales.

T_3. Recommencer en remplaçant A par un autre nombre positif.

5ème partie : la suite de Fibonacci

Léonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175-1250), était un commerçant et un grand voyageur. Son livre *Liber abbaci,* qui est principalement consacré aux calculs commerciaux, est aussi un recueil de petits problèmes dont celui très célèbre sur l'évolution d'une population de lapins qui l'amène à introduire la suite de nombres entiers suivants :

- les deux premiers termes sont 0 et 1,
- chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents ;

voici donc les 7 premiers termes : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Q_7. a. Continuer cette suite jusqu'au 15ème terme.

b. Calculer le quotient du 12ème terme par le 11ème, puis le quotient du 13ème terme par le 12ème, puis le quotient du 14ème par le 13ème et enfin le 15ème par le 14ème. Que constate-t-on ?

T_4. a. À l'aide d'un tableur, calculer les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

b. Calculer la suite des quotients obtenus en divisant un terme par son précédent. Que constate-t-on ?

6ème partie : les puissances de φ

Q_8. a. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

b. Montrer que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$ en partant de l'égalité $\varphi^3 = \varphi^2 \times \varphi$ et en remplaçant φ^2 par $\varphi + 1$. Montrer de la même façon que $\varphi^4 = 3\varphi + 2$.

c. Exprimer de la même façon φ^5, φ^6 et φ^7 en fonction de φ.

Q_9. Montrer que $\frac{1}{\varphi}=\varphi^{-1}=\varphi-1$; exprimer de même φ^{-2}, φ^{-3} et φ^{-4} en fonction de φ.

5-5 : Suites récurrentes

L'objectif de cet exercice est double :

- En mathématiques : prendre conscience de l'effet de la valeur du premier terme d'une suite définie par récurrence.
- En TICE : continuer à apprendre à utiliser un tableur.

Première partie : les observations

On s 'intéresse à la suite u définie par : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+10 \end{cases}$.

1. Calculer, à l'aide d'un tableur, les vingt premiers termes de cette suite.

2. Conjecturer alors le sens de variation et la limite de cette suite.

3. Modifier la valeur du premier terme u_0 (par exemple u_0= 30) en conservant la formule de récurrence.

Vos conjectures concernant le comportement de la nouvelle suite sont-elles les mêmes ?

4. Faire ainsi, en procédant de la même manière, plusieurs (6 ou 7 en plus des deux déjà effectués) essais successifs, en changeant seulement la valeur du premier terme u_0, tout en conservant la même formule de récurrence.

5. Faire un graphique représentant ces suites. Citer trois valeurs de u_0 telles que la suite u est strictement croissante, trois valeurs telles que la suite u est strictement décroissante, et une valeur telle que la suite u est constante.

Que peut-on dire de la limite de la suite, dans chaque cas ?

8. La suite u semble toujours monotone, et cela ne dépend que de la valeur de u_0 (la formule de récurrence étant toujours la même).

A quel intervalle semble devoir appartenir u_0 pour que la suite soit strictement croissante ? strictement décroissante ?

Deuxième partie

Modifier la feuille de calcul de façon à pouvoir calculer les valeurs des termes de la suite u définie par son premier terme u_0 qu'on pourra modifier et par la formule de récurrence $u_{n+1} = a\, u_n + b$, a et b pouvant être modifiés.

1. On prend u_0 = 10. Calculez les termes de la suite u_n pour diverses valeurs de a et b : on prendra des valeurs de a comme indiquées et diverses valeurs de b (−10, −2, 0, 5, 10). Complétez le tableau.

a	*variation*	*limite*	a	*variation*	*limite*
$a<-1$			$0<a<1$		
$a=-1$			$a=1$		
$-1<a<0$			$a>1$		

2. Est-ce que le changement de premier terme modifie quelque chose ?

Troisième partie : les démonstrations des conjectures de la première partie du TP.

1. Quelle(s) méthode(s) proposez-vous pour démontrer que la suite définie au début de la première partie est croissante ?

2. Faire la démonstration.

3. Démontrez que la suite u est majorée .

4. En déduire qu'elle converge.

5. Quelle égalité doit vérifier la limite l de cette suite ? En déduire l.

5-6 : Suite récurrente

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

1. a. En utilisant un tableur calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite.

b. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ?

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

2. Essayons de déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

a. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture.

b. Démontrer cette conjecture.

Production demandée.

- Le nuage de points attendu dans la question 1 et la particularité trouvée à ce nuage.
- La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.

5-7 : Deux suites récurrentes

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies par $a_0 = -1$ et $b_0 = 2$ et pour tout naturel n par

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n).$$

1. A l'aide de la calculatrice ou d'un tableur afficher les 20 premiers termes des deux suites et émettre une conjecture concernant le sens de variation de ces deux suites.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - b_n$ pour tout naturel n. Afficher les 20 premiers termes de cette suite et émettre une conjecture sur le signe et la convergence de u_n.

3. On considère la suite $s_n = a_n + \frac{5}{2}b_n$. Afficher les 20 premiers termes de la suite.

4. Quelle semble être la nature de ces deux suites ? sont-elles arithmétiques ? géométriques ?

5. Exprimer s_n et u_n en fonction de n. En déduire des expressions de a_n et b_n. Conclure quand à la convergence de ces suites.