TERMINALES S **15 AVRIL 2014**

BAC BLANC DE MATHEMATIQUES (4 heures)

Exercice 1 (réservé aux élèves ne suivant pas la spécialité Mathématiques) : 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+2)e^{-x}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction *f*.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe C.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 0$ et $x=1$. On approche l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D en calculant une somme d'aires de rectangles.

a. Dans cette question, on découpe l'intervalle [0 ; 1] en quatre intervalles de même longueur :

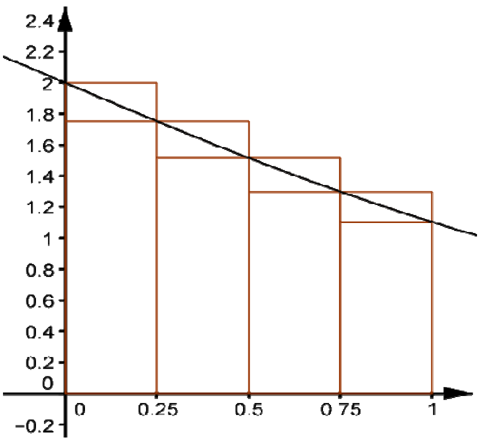
Sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle R_1 de hauteur $f(0)$ et un rectangle r_1 de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$;

sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle R_2 de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$ et un rectangle r_2 de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle R_3 de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et un rectangle r_3 de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$;

sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};1\right]$, on construit un rectangle R_4 de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et un rectangle r_4 de hauteur $f(1)$.

Cette construction est illustrée ci-dessous.



L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir un encadrement et une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles « inférieurs », puis les aires des quatre rectangles « supérieurs » précédents :

Variables	k est un nombre entier ; S et T sont des nombres réels.
Initialisation	Affecter à S la valeur 0. Affecter à T la valeur 0.
Traitement	Pour k variant de 0 à 3 Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$ Affecter à T la valeur $T+\frac{1}{4}f\left(\frac{k+1}{4}\right)$ Affecter à M la valeur (S+T) / 2 Fin Pour
Sortie	Afficher S Afficher T Afficher M

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de chacun des résultats affichés par cet algorithme.

b. Dans cette question, n est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle [0; 1] en n intervalles de même longueur : $\left[0\,;\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right],........,\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right],.....,\left[\frac{n-1}{n};1\right]$, k entier, $1 \le k \le n$.

Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle « supérieur » R_k et un rectangle « inférieur » r_k, en procédant de la même manière qu'à la question 2. a.

On pose :

$$S_n=\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+..........+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

et $$T_n=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+..........+f(1)\right].$$

Justifier que, pour tout entier naturel n, $T_n \le \mathcal{A} \le S_n$.

c. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des n rectangles « supérieurs » et la somme des aires des n rectangles « inférieurs » ainsi construits.
Donner alors, à 10^{-5} près, la valeur de M affichée par la calculatrice pour $n=50$.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(-x-3)e^{-x}$.

a. Montrer que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-5} près, de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine D, exprimée en unités d'aire.

c. Donner alors une valeur approchée de l'erreur commise en remplaçant $\mathcal{A}$ par la moyenne M des deux valeurs approchées S et T trouvées au moyen de l'algorithme de la question 2.c.

<u>Exercice 2 : 5 points</u>

Dans cet exercice les résultats sont à arrondir à 10^{-3} *près. Les trois parties sont indépendantes.*

Un fabricant produit des tondeuses dans deux usines. Le coût de fabrication est de 160 euros par tondeuse.
L'usine A produit 400 unités par mois et l'usine B en produit 600.
Le fabricant a fait réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, dans les deux usines sur une très grande quantité de tondeuses fabriquées.
Une tondeuse est déclarée conforme si le test est positif.
Dans l'usine A, le test est positif dans 90% des cas.
Dans l'usine B, le test est positif dans 95% des cas.
Une tondeuse conforme est vendue 250 euros, sinon, elle est bradée à un sous-traitant pour 100 euros.

Partie A

On prélève, au hasard, une tondeuse produite par ce fabricant.
On note A, l'évènement : « La tondeuse est produite dans l'usine A ».
On note C, l'évènement : « La tondeuse est conforme ».

1. À l'aide des données de l'énoncé, construire l'arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer $P\left(A\cap C\right)$, puis $P\left(\overline{A}\cap C\right)$.
3. En déduire la probabilité que la tondeuse soit conforme.

Partie B

On admet que chaque tondeuse qui sort des usines a une probabilité de 7% d'être non conforme.
On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de tondeuses conformes dans un lot de 250 tondeuses prises au hasard dans le stock. On admet que le nombre de tondeuses fabriquées est suffisamment grand pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité de l'évènement E : « exactement 240 tondeuses sont conformes ».
3. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.
4. On note Y la variable aléatoire qui donne le bénéfice réalisé sur un lot de 250 tondeuses.

a. Montrer que $Y = 150X - 15000$.
b. Calculer l'espérance mathématique de Y. Interpréter le résultat obtenu.

Partie C

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne m = 232,5 et d'écart type σ = 4. On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Vérifier que les conditions de cette approximation sont bien remplies et justifier le choix des valeurs de m et de σ .
2. Déterminer la probabilité que le nombre de tondeuses conformes de ce lot de 250 soit au moins égal à 240.
3. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « le nombre de tondeuses conformes est compris entre 225 et 245».

<u>Exercice 3 : 4 points</u>

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Les réponses doivent être soigneusement justifiées. Les quatre questions sont indépendantes.

Une réponse correcte bien justifiée rapporte un point. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Affirmation 1 : $(-1 - i\sqrt{3})^{2013}$ est un réel positif.

Affirmation 2 : Si A, B, C sont trois points distincts d'affixes respectives *a*, *b*, *c* telles que $\dfrac{b-a}{c-a} = e^{i\frac{\pi}{4}}$,

alors $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

Dans les affirmations 3 et 4, f désigne la transformation qui, à tout point M d'affixe $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-i}{z+2}$.

Affirmation 3: *S*i $z' = -i$, alors $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

Affirmation 4 : L'ensemble des points M tels que OM' = 1 est une droite.

<u>Exercice 4 : 5 points</u>

Dans cet exercice, *n* est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$.

1. a. Soit la fonction φ définie sur [0 ; 2] par $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$. Etudier les variations de φ .

En déduire que, pour tout réel *t* dans [0 ; 2] : $\dfrac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \dfrac{7}{4}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^2 e^{\frac{t}{n}} dt$ et en déduire que $\dfrac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq u_n \leq \dfrac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

c. Démontrer que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, puis que, si (u_n) possède une limite *L*, alors $3 \leq L \leq \dfrac{7}{2}$.

2. a. Vérifier que, pour tout *t* dans [0 ; 2], on a $\dfrac{2t+3}{t+2} = 2 - \dfrac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b. Montrer que, pour tout *t* dans [0 ; 2], on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

c. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite L.