Vrai-Faux non justifié

EXERCICE 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal. On considère le système [S] : $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -3x+y+2z=-3 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$.

On appelle P le plan d'équation cartésienne $x+2y-3z=1$ et D la droite définie par le système d'équations : $\begin{cases} -3x+y+2z=-3 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$.

a. Le système [S] admet pour unique solution en $(x\,;y\,;z)$ le triplet $(2\,;1\,;1)$.

b. La droite D est contenue dans le plan P.

c. Le système $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=0 \end{cases}$ est un autre système qui permet de définir la droite D.

d. Le vecteur $\vec{u}(2\,;1\,;1)$ est un vecteur directeur de la droite D.

Correction

a. Faux : $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ -3x+y+2z=-3 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[L_3+L_1\to L_1]{} \begin{cases} 3x-y-2z=3 \\ -3x+y+2z=-3 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases} \xrightarrow[L_1+L_2]{} \begin{cases} 3x-y-2z=3 \\ 0=0 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$.

Il y a une infinité de solutions.

b. Vrai : On peut réécrire les équations définissant D sous forme paramétrique :

$$\begin{cases} -3x+y=-3-2t \\ 2x-3y=2-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-2t+3x \\ 2x-3(-3-2t+3x)=2-t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3-2t+3x \\ -7x=-7-7t \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}.$$

Remplaçons dans P : $1+t+2t-3t=1 \Leftrightarrow 0=0$; il y a une infinité de valeurs possibles pour t, donc D est dans P.

c. Vrai : Réécrivons $\begin{cases} x-y=1 \\ y-z=0 \end{cases}$ en le paramétrant : $\begin{cases} x-y=1 \\ y-t=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$, on retrouve le système précédent.

d. Faux : Un vecteur directeur de D est $\vec{v}(1\,;1\,;1)$.

EXERCICE 2

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=3-\dfrac{4}{x+2}$.

On considère les suites *u* et *v* définies pour $n\in\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$ et $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-2}$.

On admettra que les suites *u* et *v* sont bien définies.

a. *v* est géométrique de raison 4.

b. $\displaystyle\sum_{k=5}^{15} v_k = v_5\times\frac{4^{10}-1}{3}$.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{2v_n+1}{v_n-1}$.

d. La suite *u* converge vers -1.

Correction

a. Vrai : $v_{n+1}=\dfrac{3-\dfrac{4}{u_n+2}+1}{3-\dfrac{4}{u_n+2}-2}=\dfrac{\dfrac{4u_n+8-4}{u_n+2}}{\dfrac{u_n+2-4}{u_n+2}}=4\dfrac{u_n+1}{u_n-2}=4v_n$ donc v est géométrique de raison 4.

b. Faux : $\displaystyle\sum_{k=5}^{15}v_k=v_5\left(1+q+q^2+\ldots+q^9+q^{10}\right)=v_5\times\frac{4^{11}-1}{4-1}=v_5\times\frac{4^{11}-1}{3}$.

c. Vrai : $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-2}\Leftrightarrow u_nv_n-2v_n=u_n+1\Leftrightarrow u_nv_n-u_n=2v_n+1\Leftrightarrow u_n=\dfrac{2v_n+1}{v_n-1}$.

d. Faux : $u_n=\dfrac{2v_n+1}{v_n-1}=\dfrac{2+\dfrac{1}{v_n}}{1-\dfrac{1}{v_n}}$; comme v tend vers $+\infty$, la suite u converge vers 2.

EXERCICE 3

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\times3^{2k}$ vaut 1 milliard.

b. Pour un département donné, on peut faire plus de plaques minéralogiques de véhicules composées de 4 chiffres et 2 lettres que de plaques composées de 3 chiffres et 3 lettres. (On supposera que tous les chiffres et toutes les lettres de l'alphabet sont utilisables).

c. Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au numéro de cette face. La probabilité d'apparition du 3 est $\dfrac{1}{7}$.

d. Un parking dispose de 10 places libres. Il y a $\dbinom{10}{3}$ possibilités de ranger 3 voitures dans ce parking.

Correction

a. **Faux** : 3^2 vaut presque 10, 3^{20} vaut surement plus de 10^9. Plus sérieusement appliquons le binome de Newton avec $a=1$, $b=3^2$, $n=10$: $\left(1+3^2\right)^{10}=\displaystyle\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\times3^{2k}$ or $1+3^2=10$… c'est donc 10 milliards.

b. **Faux** : On a $10^4\times26^2$ possibilités avec 4 chiffres et 2 lettres et $10^3\times26^3$ possibilités avec 3 chiffres et 3 lettres.

c. **Vrai** : La somme des probabilités des 6 faces est 1 : $\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{k}+\dfrac{3}{k}+\dfrac{4}{k}+\dfrac{5}{k}+\dfrac{6}{k}=1\Rightarrow k=21$ d'où la probabilité du 3 est $\dfrac{3}{21}=\dfrac{1}{7}$.

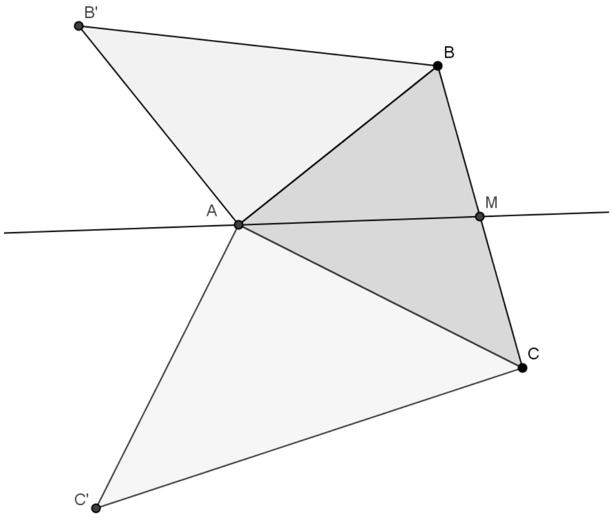
d. **Vrai** : Si on numérote les voitures 1, 2, 3. la voiture 1 a 10 choix, la 2 9 choix et la 3 8 choix, soit $10\times9\times8$ possibilités, mais comme a priori la manière de se ranger ne compte pas on peut diviser par 3 ! Je réponds Vrai mais un doute peut subsister (la notion de rangement n'est pas claire).

EXERCICE 4

On considère un triangle ABC et le point M milieu de $[BC]$.

On appelle B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

On munit le plan complexe d'un repère de centre A dans lequel B, C, B', C' et M ont les affixes respectives b, c, b', c' et m.



a. $c' + ic = 0$ et $b' - ib = 0$.

b. $\frac{c'-b'}{m} = -2i$.

c. (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

d. $B'C = 2AM$.

Correction

a. Vrai :

b. Vrai :

c. Vrai :

d. Vrai :

EXERCICE 5

On dispose de quatre urnes numérotées de 1 à 4. Les urnes sont composées ainsi :

Urne U_1 : 1 boule bleue et 3 boules rouges ;

Urne U_2 : 2 boules bleues et 4 boules rouges ;

Urne U_3 : 3 boules bleues et 5 boules rouges ;

Urne U4 : 6 boules rouges.

Un joueur choisit une urne au hasard, puis prélève une boule au hasard de cette urne. Le joueur est gagnant s'il tire une boule bleue; il est perdant sinon. On désigne par :

- Ω l'univers des possibilités et P la probabilité associée ;
- P_A la probabilité conditionnée par un événement A de Ω ;
- G l'événement: « le joueur gagne » ;
- U_n l'événement: «le joueur choisit l'urne U_n ».

a. $P_{U_1}(G) = \frac{2}{3} P_{U_3}(G)$.

b. $P(G) = \frac{9}{8}$.

c. $P(U_1) = \frac{1}{6}$.

d. $P_{U_2}(G) = P_G(U_2)$.

Correction

a. Vrai :

b. Faux :

c. Faux :

d. Faux :

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. On appelle (C) la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-2$.

b. f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

c. Pour $x\in\,]-1\,;1[$ et $x\neq 0$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ existe et vaut $f\left(\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

d. Soient g la fonction définie sur $]-1\,;1[$ par $g(x)=f\left(|x|\right)$ et (Γ) la courbe représentant g dans le même repère que (C). On déduit (Γ) à partir de (C) par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

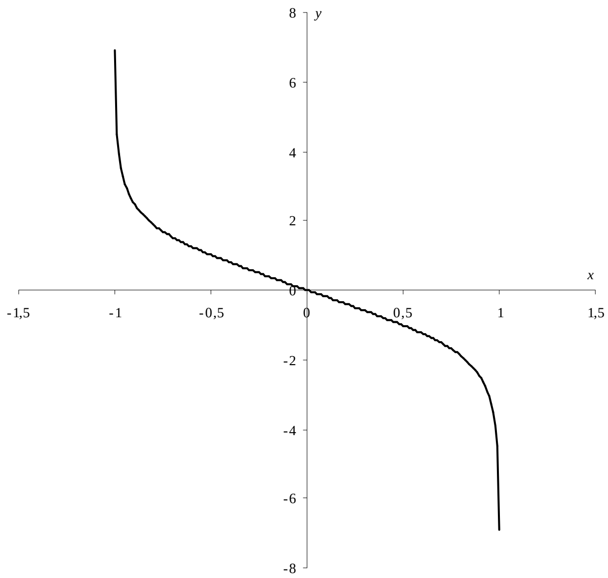
<u>Correction</u>

a. **Vrai** : Cette question utilise deux fois la limite suivante du cours : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{-x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=-2.$$

Le résultat se voit clairement sur la courbe de f.

b. **Faux** : f est dérivable en 0 : oui ; $f'(0)=0$: non, avec la question précédente on a $f'(0)=-2$.



c. **Faux** : Sans calcul la réponse est immédiate car x^2-1 est négatif sur $]-1\,;1[$, donc $f\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas !

d. **Faux** : La fonction f est impaire, la fonction g est paire car $|-x|=|x|$. Si on prend la restriction (C') de (C) sur [0 ; 1[, alors la courbe (Γ) est la réunion de (C') et de l'image de cette restriction par la symétrie d'axe (Oy). Si on prend la courbe (C) dans son entier, la symétrie ne donne pas (Γ).

La question n'est pas très bien posée… le terme « on déduit » peut laisser supposer que l'on fait la symétrie sur (C) puis que l'on coupe les morceaux qui nous intéressent…

EXERCICE 7

Pour tout entier n, $n\geq 3$, on désigne par u_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant n côtés. On appelle u la suite ainsi définie pour $n\geq 3$, de terme général u_n.

a. $u_5=6$ et $u_6=10$.

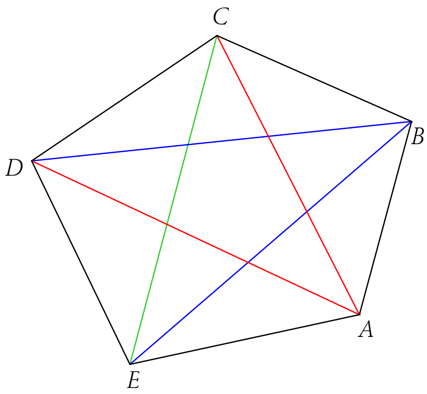
b. Pour tout entier n, $n\geq 3$, on a $u_{n+1}=u_n+n-1$.

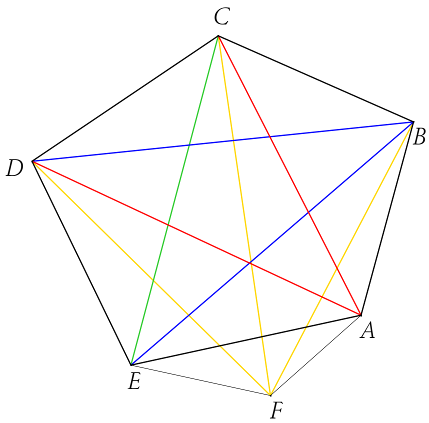
c. La suite u est une suite arithmétique de raison $n-1$.

d. Pour tout entier n, $n\geq 3$, on a : $u_n=\frac{n(n-3)}{2}$.

Correction

u_n = nombre de diagonales d'un polygone convexe ayant n côtés.





a. **Faux** : $u_5=5$ et $u_6=9$; lorsqu'on rajoute le point F on rajoute 3 diagonales et un côté devient une diagonale….

b. **Vrai** : Lorsqu'on rajoute un point au polygone à n sommets, on rajoute 2 côtés et $n-2$ diagonales, par ailleurs un côté devient une diagonale donc : $u_{n+1}=u_n+n-2+1=u_n+n-1$.

c. **Faux** : Une suite arithmétique a une raison constante !

d. **Vrai** : Par récurrence : $u_3=0$, ok ; $u_4=\frac{4}{2}=2$, $u_5=\frac{5.2}{2}=5$, $u_6=\frac{6.3}{2}=9$, ok ; $u_n=\frac{n(n-3)}{2}$ donc $u_{n+1}=\frac{(n+1)(n-2)}{2}$; a-t-on $u_{n+1}=u_n+n-1$ ¿ $\frac{(n+1)(n-2)}{2}=\frac{n(n-3)}{2}+n-1 \Leftrightarrow \frac{n^2-n-2}{2}=\frac{n^2-3n+2n-2}{2}$.

EXERCICE 8

Un sondage fait état de l'intérêt d'un certain nombre de personnes sur la lecture de trois revues, appelées A, B et C. Tous les chiffres cités ci-dessous font référence à ces personnes sondées.

Parmi les personnes interrogées, 75 lisent A, 58 lisent B et 60 lisent C. On sait de plus que 18 lisent A et B, 18 lisent B et C et 15 lisent A et C. Enfin 3 personnes lisent les trois revues et 5 personnes ne lisent aucune de ces revues.

Par ailleurs, et parmi les personnes qui ne lisent que la revue A, 20 sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue B, les deux-cinquièmes sont des femmes ; parmi les personnes qui ne lisent que la revue C, il ya moitié-moitié d'hommes et de femmes.

a. 150 personnes ont été sondées.

b. 100 personnes lisent une et une seulement de ces trois revues.

c. On interroge au hasard une personne du sexe masculin qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

d. On interroge au hasard une personne qui ne lit que l'une des trois revues. Il y a 25 % de chances qu'il s'agisse d'un homme qui ne lise que la revue A.

Correction

a. **Vrai** : On fait une patate et on voit que :

ne lisent que A et B : $18-3=15$, ne lisent que A et C : $15-3=12$ et ne lisent que B et C : $18-3=15$;

ne lisent que A : $75-(15+12+3)=45$,

ne lisent que B : $58-(15+15+3)=25$,

ne lisent que C : $60-(15+12+3)=30$.

Au total on a donc $45+25+30+15+15+12+3+5=150$ personnes.

b. **Vrai** : Il y a $45+25+30=100$ personnes qui ne lisent qu'une seulement de ces trois revues.

c. **Faux** : Il y a au total $25+15+15=55$ hommes ne lisant qu'une des revues ; sur ces 55, 25 lisent A, soit un peu moins de 50 %.

d. **Vrai** : Il y a 25 hommes parmi les lecteurs de A, soit bien 25% des lecteurs considérés.

EXERCICE 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On considère les complexes z_1 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, $z_2=\overline{z_1}$ et $z_3=1+i$.

a. $\left|\dfrac{z_3^8\times z_1^9}{z_2^{11}}\right|=4$.

b. $\dfrac{z_1^4\times z_2^7}{z_3^6}$ est un nombre réel.

c. $\left(z_1-z_3\right)^4=28-16\sqrt{3}$.

d. L'ensemble des points M d'affixe z telles que $\arg(z)=\arg(z_3)$ est la droite d'équation $y=x$.

Correction

a. **Vrai** : $\left|\dfrac{z_3^8\times z_1^9}{z_2^{11}}\right|=\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^8\times 2^9}{2^{11}}=\dfrac{2^4\times 2^9}{2^{11}}=2^2=4$.

b. **Faux** : $\arg\dfrac{z_1^4\times z_2^7}{z_3^6}=4\arg z_1+7\arg z_2-6\arg z_3=4\dfrac{\pi}{3}-7\dfrac{\pi}{3}-6\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{5\pi}{2}$ donc c'est un imaginaire pur.

c. **Vrai** :

$$\begin{aligned}\left(z_1-z_3\right)^4&=\left(1+i\sqrt{3}-1-i\right)^4=(-i)^4\left(1-\sqrt{3}\right)^4=1^4-4.1^3\sqrt{3}+6.1^2\left(\sqrt{3}\right)^2-4.1\left(\sqrt{3}\right)^3+\left(\sqrt{3}\right)^4\\&=1-4\sqrt{3}+18-12\sqrt{3}+9=28-16\sqrt{3}.\end{aligned}$$

d. **Faux** : dans tous les cas $\arg(z)=\arg(z_3)$ s'exprime modulo 2π ; au mieux c'est une demi-droite ; pour avoir une droite entière il faudrait que ce soit modulo π.

EXERCICE 10

a. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que, quel que soit $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)\le g(x)\le h(x)$, que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=5$.

Alors $g(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$ et cette limite est comprise entre 3 et 5.

b. Soit f la fonction définie par $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. (C) possède une asymptote d'équation $x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=0$.

c. La fonction F définie par $F(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x}{2}$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x)=x\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

d. Soient f la fonction définie par $f(x)=2\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère du plan. (C) possède au point d'abscisse -1 une tangente d'équation $y=-2x-2$.

Correction

a. **Faux** : par exemple g peut osciller entre f et h sans avoir de limite.

b. **Vrai** : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=e^{-\frac{1}{0-}}=e^{+\infty}=+\infty$ donc asymptote d'équation $x=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=e^{-\frac{1}{0+}}=e^{-\infty}=0=f(0)$.

c. **Faux** : lorsqu'on dérive F on ne retrouve pas $f(x)=x\ln x$.

d. **Faux** : tangente en -1 pour $\ln x$ … bof !