

EXERCICE 1 (TOUS)

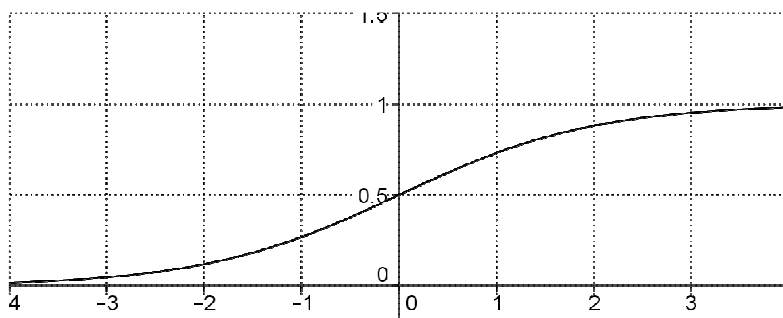
Étant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est donnée ci-contre.



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$

en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x , $f_1(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x , $f'_1(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f_1(x) dx$. Donner une interprétation graphique de I .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe C_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de C_1 d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse x .

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe C_{-1} sur la figure précédente.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes C_1 , C_{-1} , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k , la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k est strictement croissante.

3. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k a pour limite 0 en $-\infty$.

4. Quelle que soit la valeur du réel k , la fonction f_k a pour primitive $\ln(e^{kx} + 1)$.

5. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0,99$.

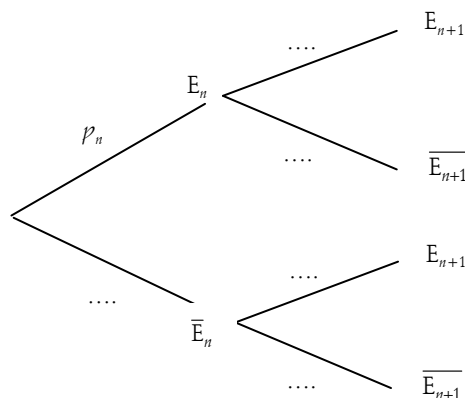
EXERCICE 2 (NON SPECIALISTES)

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n .

On a ainsi $p_1 = 0$.



- a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
- b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-contre.
- b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q .
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q .
- d. En déduire la limite de la suite (p_n) .
- e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur J+1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

- Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

- Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 10 et inférieur ou égal à 15 ».
- Sachant que le nombre de salariés absents une semaine est supérieur à 10 pour cause de congés, quelle est la probabilité que le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours de cette semaine soit inférieur ou égal à 15 ?