SENAC
Cédric
T°S5

06/01/14

DS de Maths

$15 + 5 = 20$

Exercice 1.

A] 1. Pour connaître graphiquement le signe de $f(x)$, il suffit de regarder pour quelles valeurs de x la courbe C est au-dessus de Ox et pour quelles valeurs elle est en dessous.

La courbe C est au-dessus de la courbe pour $]1 ; 10]$ et son allure nous permet de conjecturer que la courbe C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et donc que la courbe est au-dessus de Ox pour $x \in]1 ; +\infty[$. Donc $f(x) \geq 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$.

$F(x)$ est l'intégrale de $f(x)$ de x à e.

- si $x < e$ alors $dt \leq 0$ car on va du positif vers le négatif
- si $x > e$ alors $dt \geq 0$ car on va du négatif vers le positif.

Or comme $f(x) \geq 0$, on en déduit que :
pour $x \in]1 ; e]$, $F(x) \leq 0$
pour $x \in [e ; +\infty[$, $F(x) \geq 0$.

2. a) $F(x) = \int_e^x f(t)\,dt$ donc $F'(x) = f(x)$.

Graphiquement, ~~on voit~~ sur la courbe $\mathcal{C}$ que :

- $f(2) \simeq 0,73$ donc $F'(2) \simeq 0,73$
- $f(4) \simeq 0,33$ donc $F'(4) \simeq 0,33$.

b) On peut éliminer la courbe $\mathcal{C}_1$ car graphique, on constate que $F(2) > -1$ car l'aire sous la courbe entre les droites $x = 2$ et $x = e$ est inférieure à un carré de côté 1 du quadrillage.
On sait d'ailleurs que $F'(2)$, le coefficient directeur de la tangente à au point d'abscisse 2 est inférieur à 1, ce qui élimine $\mathcal{C}_2$ où il vaut environ :
Il s'agit donc de $\mathcal{C}_3$, la seule qui reste.

B] 1. On utilise la formule de dérivation des fonctions composées.

$[x \ln(x)]' = u'v + uv'$
$= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$
$= \ln x + 1.$

Soit $g(x) = \frac{1}{x}$
$g'(x) = \frac{-1}{x^2}$

$f'(x) = [x \ln(x)]' \times g'(x \ln(x))$
$= (\ln x + 1) \times \frac{-1}{(x \ln(x))^2}$
$= \cancel{\frac{-\ln x - 1}{(x \ln(x))^2}}$

$f'(x) \geq 0 \iff -(\ln x + 1) \geq 0$ car $(x \ln(x))^2 \geq 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$
$\iff -\ln x - 1 \geq 0$
$\iff \ln x \leq -1$
impossible car $x \in]1 ; +\infty[$ donc $\ln x > 0$.

Donc $f'(x) \geq 0$. donc f est croissante sur $]1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{(+\infty)\times(+\infty)} = 0.$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{1 \times \ln(1^+)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

2. a) La limite de F(x) quand x tend vers $+\infty$ est géométriquement l'aire en centimètres de la surface délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = e$.

b) $f(x) = \frac{u'}{u}$ avec $u' = \frac{1}{x}$ et $u = \ln x$
Soit G une primitive de f
Donc $G(x) = \ln u = \ln(\ln(x))$

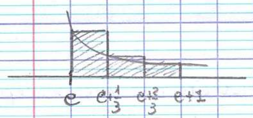
Donc $F(x) = \int_e^x f(t)dt = G(x) - G(e)$
$= \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(e))$
$= \ln(\ln(x)) - \ln(1) = \ln(\ln x) = G(x)$

c) Donc $F(e+1) = \ln(\ln(e+1))$

(courbe représentative de F)

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ln(+\infty) = +\infty$

3. a) S_3 est la somme de l'aire du rectangle de côtés $\frac{1}{3}$ et $f(e)$, du rectangle de côté $\frac{1}{3}$ et $f(e+\frac{1}{3})$ et du rectangle de côté $\frac{1}{3}$ et $f(e+\frac{2}{3})$
Cette aire est en centimètres.



7 b) Quand n devient grand $S_n \simeq F(e+1)$ car grâce à la méthode des rectangles, on approxime à l'excès $F(e+1)$ avec de plus en plus de précision à mesure que n, le nombre de rectangles, augmente.

Exercice 2.

A. $f(0) = 3\times 0 + \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$ L'ordonnée à l'origine est $\frac{1}{2}$ donc (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{1}{2}$.
FAUX.

B. Soit $F(x)$ la primitive de $f(x)$.
$F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \ln(x+2)$

$\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = \frac{3}{2}\times 2^2 + \ln 4 - (\frac{3}{2}\times 0 + \ln 2)$
$= 6 + \ln 4 - \ln 2$
$= 6 + \ln \frac{4}{2}$
$= 6 + \ln 2$.
VRAI

C. ~~$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} 3x + \lim_{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$~~

~~$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 3\times(-2) + \frac{1}{-2-2^+} = 3\times(2) + \frac{1}{0^+} = -6 + \infty = +\infty$~~

FAUX

3 (C) n'a pas d'asymptote verticale $y=3$ car $f(x)$ existe pour $x \in]-2; +\infty[$ donc il n'y a aucune asymptote verticale dans cet intervalle.

D. $f(-1) = 3\times(-1) + \frac{1}{1} = -1 < 0$. Or $\ln x$ avec $x<0$ n'existe pas.
Donc $g(x)$ n'existe pas sur tout l'intervalle $]-2; +\infty[$ et ne peut donc pas être croissante sur tout l'intervalle.

Exercice 3

Partie A 1. L'algorithme s'arrête dès que x dépasse 9 ou que y sort de l'intervalle $[-1; 1]$. Sachant qu'à chaque itération la valeur de x augmente de 1, on en déduit que x, à la sortie de l'algorithme, est compris dans l'intervalle $[0, 10]$ car x part de la valeur 0 et ne peut pas diminuer puisque la seule opération effectuée est l'addition de 1.
Quant à y, il subit une variation de une unité maximum à chaque itération (puisque n peut prendre les valeurs 0, 1 et -1, y prend les valeurs $y-1$, y ou $y+1$) donc $y \in [-2; 2]$ car l'algorithme s'arrête si y sort de l'intervalle $[-1; 1]$ et y prend la valeur 0 au début de l'algorithme.

SENAC Cedric

$(-1;1)$ n'a pas pu être obtenu car $x=-1 \notin [0;10]$
$(10;0)$ a pu être obtenu car $x \in [0;10]$ et $y \in [-2;2]$
$(2;4)$ n'a pas pu être obtenu car $y=4 \notin [-2;2]$
$(10;2)$ a pu être obtenu car $x \in [0;10]$ et $y \in [-2;2]$

2. x, y, n sont des entiers

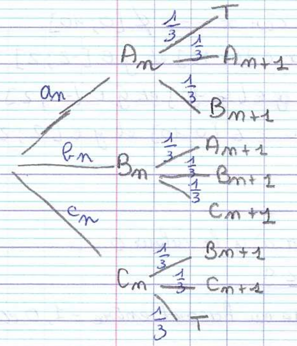
```
Affecter à x la valeur 0. Affecter à y la valeur 0.
Tant que y ≥ -1 et y ≤ 1 et x ≤ 9
    Affecter à n une valeur choisie au hasard entre -1, 0 et 1
    Affecter à y la valeur y+n
    Affecter à x la valeur x+1
Fin tant que.
Si x = 10 et y ≥ -1 et y ≤ 1 alors
    Afficher "Tom a réussi la traversée"
Sinon
    Afficher "Tom est tombé"
Fin si
```

Remarque : "x = 10" n'est pas nécessaire puisque l'algo s'arrête à ce moment

Partie B

1. Tom se trouve au point de coordonnées $(0;0)$ au départ donc il se trouve sur un point d'ordonnée 0 après 0 déplacement. Donc $b_0 = 1$ car il s'agit d'un événement certain car déterminé/présupposé. Or puisque a_0, b_0 et c_0 sont mutuellement exclusifs, $a_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

2. Soit T l'événement "Tom tombe"
D'un point d'ordonnée 0, Tom atteint une case d'ordonnée -1, 0 ou 1.
D'un point d'ordonnée 1, Tom tombe ou atteint une ordonnée de 0 ou 1
D'un point d'ordonnée -1, Tom tombe ou atteint un point d'ordonnée 0 ou -1. Chaque mouvement (trois possibilités) est équiprobable donc la probabilité de chaque mouvement est de $\frac{1}{3}$.



Grâce aux probabilités totales, on a :

Donc $a_{n+1} = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) + p(C_n \cap A_{n+1})$
$= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(\dots)$
$= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times 0$
$= \frac{a_n + b_n}{3}$

$b_{n+1} = p(A_n) \times p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(C_n) \times p_{C_n}(\dots)$
$= a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{3} + c_n \times \frac{1}{3}$
$= \frac{a_n + b_n + c_n}{3}$

pour $0 \leq n \leq 9$ avec $n \in \mathbb{N}$ car le nombre de déplacements est de 9 maximum.

3. $p(A_1) = a_1 = \frac{a_0 + b_0}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$
$p(B_1) = b_1 = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{3} = \frac{0+1+0}{3} = \frac{1}{3}$
$p(C_1) = c_1 = \frac{b_0 + c_0}{3} = \frac{1+0}{3} = \frac{1}{3}$

5

4. La probabilité que Tom se trouve sur le pont après deux déplacements est $p(A_2 \cup B_2 \cup C_2)$
Or $p(B_2 \cup A_2 \cup C_2) = p(A_2) + p(B_2) + p(C_2)$
$= a_2 + b_2 + c_2$
$= \frac{(a_1 + b_1) + (a_1 + b_1 + c_1) + (b_1 + c_1)}{3}$
$= \frac{1}{3} \times \frac{2+3+2}{3}$
$= \frac{1}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{9}$
Donc la probabilité que Tom se trouve toujours sur le pont après deux déplacements est de $\frac{7}{9}$.

5. La probabilité que Tom traverse le pont est $p(A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10})$
Or $p(A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10}) = a_{10} + b_{10} + c_{10}$
$\simeq 0,040272 + 0,056953 + 0,040272$
$\simeq 0,137$ arrondi à 0,001 près.