Devoir surveillé 2 bis **Suites** **2 heures**

1. Conjecture, La Réunion 2008

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=5$ et, pour tout entier $n\geq 1$, $u_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)u_{n-1}+\frac{6}{n}$.

1. a. Calculer u_1.

b. Les premières valeurs de u_n sont données ci-dessous :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	45	77	117	165	221	285	357	437	525	621

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $\left(d_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n=u_{n+1}-u_n$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n=4n^2+12n+5$.

3. Valider la conjecture émise à la question 1. b.

2. Yeaah 1 !

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4$.

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n=u_n-6$.

1. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n=-5\left(\frac{1}{3}\right)^n+6$.

3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

3. Yeaah 2 !

1. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n\geq 1$: $nw_n=\left(n+1\right)w_{n-1}+1$ et $w_0=1$.

a. Écrire un algorithme permettant de calculer les 100 premiers termes de la suite (w_n).

b. Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite :

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

2. a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2012}.

4. Bac C, N. Calédonie 1986

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0=12, v_0=1, u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}, v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{4}$.

1. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $w_n=u_n-v_n$.

Montrer que (w_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer w_n en fonction de n.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

3. Pour tout entier $n\geq 1$, démontrer que $u_n\geq v_n$. En déduire que $u_1\geq u_n\geq v_n\geq v_1$.

Que peut-on en déduire pour la convergence des suites ?

4. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose $t_n=3u_n+8v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite constante.

5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis les limites de (u_n) et (v_n).

5. Vrai-Faux justifié

1. On considère la suite (t_n) définie par : $t_0=0$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1}=t_n+\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n=\frac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que : pour tout entier naturel n,

$$u_n\leq w_n\leq v_n.$$

Proposition 2 : Si la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante alors la suite (w_n) est convergente.