**Devoir surveillé 2** **Suites** **2 heures**

### *1. De Mesmaeker*

Monsieur De Mesmaeker, grand patron bruxellois, propose à ses nouveaux employés les deux contrats suivants : dans tous les cas un salaire initial de 1500 € pour le premier mois, augmenté de 5 € chaque mois (contrat 1), ou augmenté de 0,3% tous les mois (contrat 2).

1. Soient $u_n$ et $v_n$ les salaires respectifs pour chaque contrat le $n^{\text{ième}}$ mois.

Exprimer $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

2. Quel salaire gagnerait-on pour chaque contrat après un an passé dans l'entreprise ?

3. Comparer la **totalité** des sommes gagnée par quelqu'un qui resterait pendant 40 ans dans l'entreprise.

### *2. Suite récurrente, La Réunion 2007*

Soit $a$ un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite $u$ définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. À l'aide d'une représentation graphique adaptée, préciser le sens de variation de $u_n$ ainsi que sa limite $L$.

2. Étudier la monotonie de la suite $u$.

3. a. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2 + x$. Étudier le sens de variations de la fonction $h$.

En déduire que pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\,;\,0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite $u$ en utilisant les théorèmes du cours.

4. a. Écrire un algorithme permettant de déterminer la plus petite valeur $n_0$ de $n$ pour laquelle la distance entre $u_n$ et $L$ devient inférieure à un nombre donné $p$.

b. Déterminer la valeur de $n_0$ pour $p = 10^{-5}$.

### *3. Conjecture, La Réunion 2008*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1. a. Calculer $u_1$.

b. Les premières valeurs de $u_n$ sont données ci-dessous :

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 45 | 77 | 117 | 165 | 221 | 285 | 357 | 437 | 525 | 621 |

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

3. Valider la conjecture émise à la question 1. b.

### *4. Vrai-Faux*

On considère une suite $(u_n)$, définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite $(v_n)$ sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si $(u_n)$ est convergente, alors $(v_n)$ est convergente.

2. Si $(u_n)$ est minorée par 2, alors $(v_n)$ est minorée par $-1$.

3. Si $(u_n)$ est décroissante, alors $(v_n)$ est croissante.

4. Si $(u_n)$ est divergente, alors $(v_n)$ converge vers zéro.