Devoir surveillé 11 — 4 heures

Oscilloscopes, Polynésie 2004

4 points

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle) de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0{,}286$ montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

ROC+suite, N. Calédonie 11/2008

3 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.

1. Restitution organisée de connaissances : La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} g'(x)=g(x) \\ g(0)=1 \end{cases}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par : $u_n=\dfrac{1}{n}\left[1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right]$.

1. Démontrer que $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n=(e-1)f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

Feux rouges, Asie 2002

5 points

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'évènement «Amélie est arrêtée par le n-ième feu rouge ou orange » et $\overline{E_n}$ l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E_n}$.

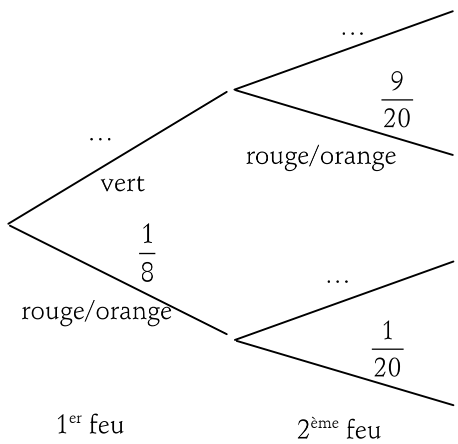
La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $n+1^{\text{ième}}$ feu tricolore soit rouge ou orange si le $n^{\text{ième}}$ feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- la probabilité que le $n+1^{\text{ième}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le $n^{\text{ième}}$ feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E_n})$, montrer, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$.

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

Equation diff+fonction+intégrale

3 points

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$z' - 2z = 0 .$$

Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0.

Plans et droites, Antilles 2007

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3 ; 0 ; 6)$ et $I(0 ; 0 ; 6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I .

On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $\left(O ; \vec{j}\right)$ et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $\left(O ; \vec{j}\right)$.
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est $x + 4y + 2z - 12 = 0$.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA). Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
6. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.