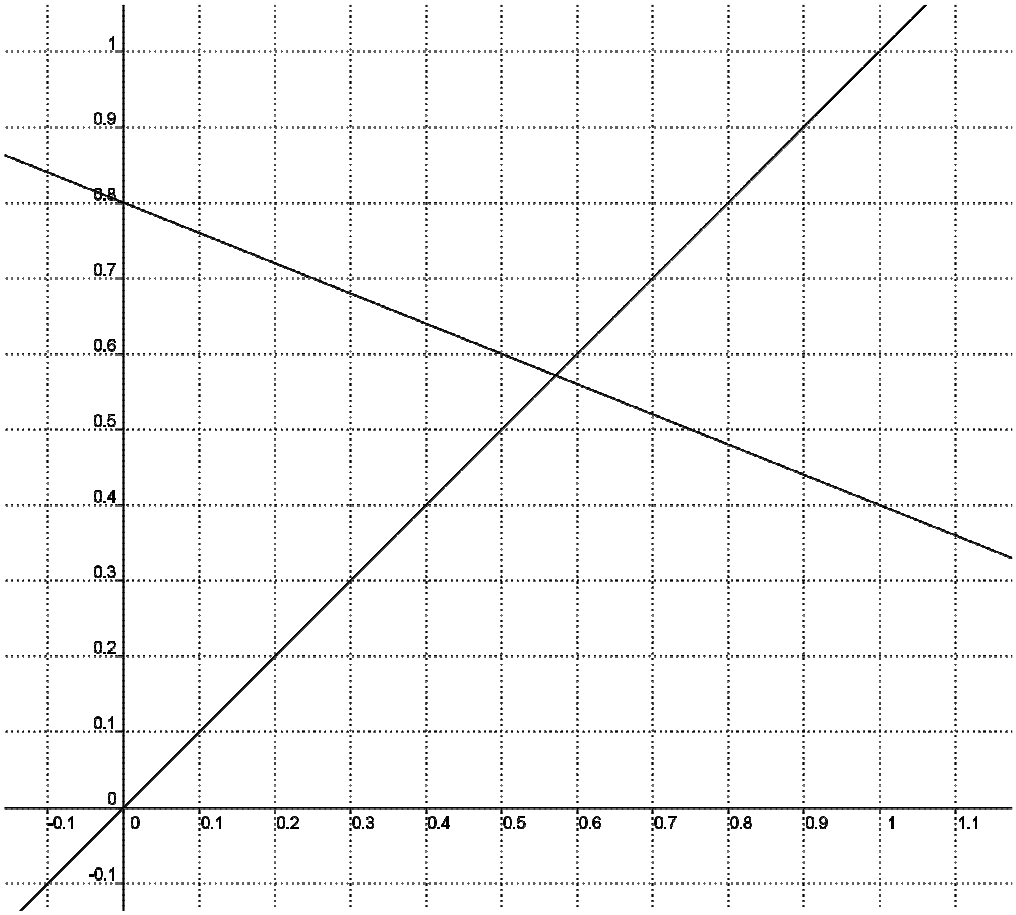
Devoir surveillé 1 **Suites** **1 heure**

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

1. Placer les termes u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 de la suite u_n sur la figure ci-dessous en vous aidant des droites tracées.



2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$. La suite u_n est-elle monotone ?

3. a. On considère la suite v_n définie par $v_n = u_n - \frac{4}{7}$. Quelle est la nature de v_n ? Donner une expression de v_n puis de u_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (u_n).

b. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la distance de u_n à sa limite devient inférieure à 0,001.

4. a. Calculer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

5. Étant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$. Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse (justifier).

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.