Bac Blanc — La Merci — 4 heures

1. Exercice 1, 5 points

Partie A

La fonction *f* est définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. Étudier la limite de la fonction *f* en +∞.

2. Étudier les variations de la fonction *f* et dresser son tableau de variations.

3. Établir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle]0 ; +∞ [. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant *t*, *t* étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel *t* appartenant à l'intervalle [0 ; +∞ [associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction *f* étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

2. On se propose de démontrer que cette fonction *f* est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a. On note *g* une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur [0 ; +∞ [vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle [0 ; +∞ [, de l'équation différentielle (E') : $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E').

c. Conclure.

3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

Corrigé

Partie A $f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. En +∞, $e^{-\frac{1}{2}x}$ tend vers 0 et l'emporte allègrement sur $20x+10$. La limite est 0.

2. $f'(x)=20e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}=(-10x+15)e^{-\frac{1}{2}x}$ qui est positif lorsque $x<\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$.

x	0		3/2		+∞
$f(x)$		+	0	−	
$f'(x)$	10	↗	18,9	↘	0

3. Comme $f(0)=10$ et *f* est croissante, il n'y a pas de solution entre 0 et 3/2 ; comme la limite en +∞ est 0, il y a une unique solution entre 3/2 et +∞ : $f(4,674)=9,997...\le 10\le 10,00099=f(4,673)$ donc $4,673\le\alpha\le 4,674$.

Partie B

1. On remplace : $y'+\frac{1}{2}y=(-10t+15)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}(20t+10)e^{-\frac{1}{2}t}=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

2. g solution de (E) : $g'+\frac{1}{2}g=20e^{-\frac{1}{2}t}$; comme on a $f'+\frac{1}{2}f=20e^{-\frac{1}{2}t}$, en soustrayant on a

$g'-f'+\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}f=0\Leftrightarrow(g-f)'+\frac{1}{2}(g-f)=0$, soit $g-f$ zest solution de (E').

$y=g-f=Ce^{-\frac{1}{2}t}\Rightarrow g(t)=f(t)+Ce^{-\frac{1}{2}t}$;

comme $g(0)=10$, on a $C=g(0)-f(0)=10-10=0$ et donc $g=f$.

3. La température redescend à 10 à $t=\alpha$, soit environ 4,67 h.

2. Exercice 2, 4 points

Cet exercice est un Questionnaire à Choix Multiple. Pour chaque question une seule des réponses proposées est exacte. Pour chaque question vous justifierez votre réponse ; toute réponse non-justifiée ne sera pas notée.

1. L'équation $e^{2x}-3e^{x}-4=0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	**b. 1 solution**	c. 2 solutions	d. plus de 2 solutions

Réponse : On pose $e^{x}=X$, soit $X^2-3X-4=0$ qui a pour solutions $X=-1\Leftrightarrow e^{x}=-1$ ce qui est impossible et $X=4\Leftrightarrow e^{x}=4\Leftrightarrow x=\ln 4$, seule solution.

2. La dérivée de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$ est :

a. $f'(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$	b. $f'(x)=\frac{4e^{x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}$	c. $f'(x)=\frac{-4e^{x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}$	**d. $f'(x)=\frac{4}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}$**

Réponse :

$$f'(x)=\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}+e^{-x}\right)-\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{2x}+2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^{x}e^{-x}-e^{-2x}}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}=\frac{4}{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=$

a. $\frac{1}{2}$	b. 1	**c. 2**	d. $+\infty$

Réponse : le terme $2e^{x}-1$ est équivalent à $2e^{x}$ en $+\infty$; le terme $e^{x}+2$ est équivalent à e^{x}, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{e^{x}}=2$.

4. On a $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=...$

a. 0	b. 1	c. $+\infty$	d. $-\infty$

Réponse : si on pose $X=\sqrt{x}$, on a $x=X^2$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}X\ln X^2=\lim\limits_{x\to0^+}2X\ln X=0$ (théorème du cours).

3. Exercice 3, 6 points

Cet exercice ne nécessite aucune utilisation du calcul intégral…

On considère la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=1+x\ln x$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Le but de cet exercice est de déterminer un encadrement de l'aire ***A*** du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

On note M et N les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1;2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1;2]$, le point E est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (MN).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point E. montrer qu'une équationde (T) est : $y=(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

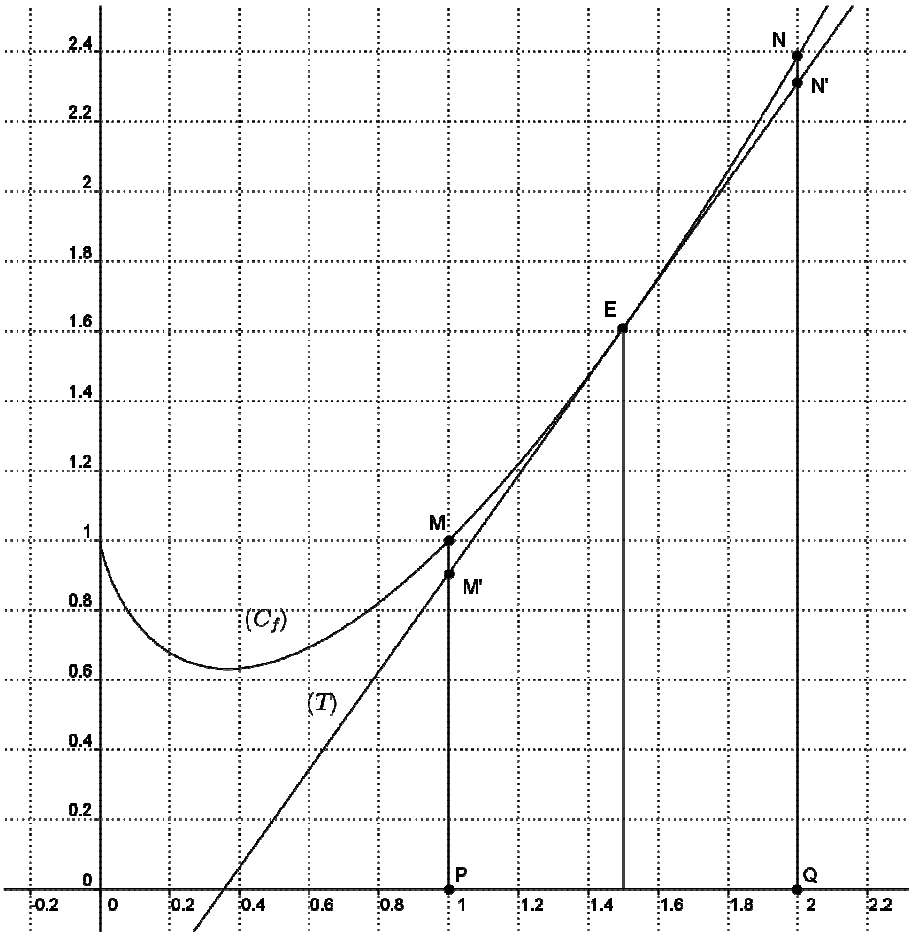
a. Montrer que $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout x de $[1;2]$.

b. Etudier les variations de g sur $[1;2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient M' et N' les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (MN) sur l'intervalle $[1;2]$ et que les points M' et N' ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes $MNQP$ et $M'N'QP$.

b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\boldsymbol{A}$ d'amplitude 10^{-1}.



Partie A

Corrigé

1. a. $\ln x>0$ sur $[1;2]$ donc f est positive sur $[1;2]$.

b. M a pour coordonnées $(1;1)$, N $(2;1+2\ln 2)$; le coefficient directeur de la droite (MN) est $\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-2\ln 2}{-1}=2\ln 2$.

c. La dérivée de f est : $f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$; la tangente à (C_f) est parallèle à (MN) lorsque $\ln x+1=2\ln 2\Leftrightarrow x=e^{2\ln 2-1}=\frac{1}{e}\left(e^{\ln 2}\right)^2=\frac{4}{e}$.

d. $y=2\ln 2\left(x-\frac{4}{e}\right)+\left(1+\frac{4}{e}\ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)=(2\ln 2)x-2\ln 2\times\frac{4}{e}+1+\frac{4}{e}\ln 4-\frac{4}{e}=(2\ln 2)x+1-\frac{4}{e}$ ($\ln 4=2\ln 2$).

2. Soit g la fonction définie sur $[1;2]$ par $g(x)=f(x)-\left[(2\ln 2)x-\frac{4}{e}+1\right]$.

a. $g'(x)=f'(x)-2\ln 2=1+\ln x-\ln 4=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)$.

b. $g'(x)=1+\ln\left(\frac{x}{4}\right)\geq 0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{x}{4}\right)\geq -1\Leftrightarrow\frac{x}{4}\geq e^{-1}\Leftrightarrow x\geq\frac{4}{e}$.

Lorsque $x=\frac{4}{e}$, g est nulle ; donc décroissante jusqu'à $\frac{4}{e}$ puis croissante, le minimum est 0 ; conclusion $g(x)\geq 0$ et (C_f) est au-dessus de (T).

3. a. Il nous faut les ordonnées de M' et N' : $y_{M'}=(2\ln 2)+1-\frac{4}{e}$, $y_{N'}=(4\ln 2)+1-\frac{4}{e}$.

Aire de $MNQP$: $\frac{(PM+QN)}{2}\times PQ=\frac{(y_M+y_n)}{2}\times 1=1+\ln 2\approx 1{,}693$;

aire de $M'N'QP$: $\frac{(PM'+QN')}{2}\times PQ=\frac{(y_{M'}+y_{N'})}{2}\times 1=3\ln 2+1-\frac{4}{e}\approx 1{,}608$;

b. L'aire ***A*** est comprise entre ces deux valeurs : 1,6 à 10^{-1} près.

4. Exercice 4, 5 points (non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. L'unité graphique est 1 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=2-3i$, $z_B=i$ et $z_C=6-i$.

On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie A

1. Calculer $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\frac{i(z-2+3i)}{z-i}.$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D=1-i$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.

2. a. Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.

b. Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM'=\frac{AM}{BM}$.

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}\right)+\frac{\pi}{2}$ à 2π près.

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

Corrigé (Polynésie, septembre 2011)

Partie A

1. $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{i-2+3i}{6-i-2+3i} = \dfrac{-2+4i}{4+2i} = \dfrac{-2+4i}{4+2i}\dfrac{4-2i}{4-2i} = \dfrac{20i}{20} = i$.

2. $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{AB}{AC} = |i| = 1$. Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en A.

Partie B

1. $z_{D'} = \dfrac{i(1-i-2+3i)}{1-i-i} = \dfrac{-2-i}{1-2i} = \dfrac{(-2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{-5i}{5} = -i$.

2. a. On cherche z tel que $2i = \dfrac{i(z-2+3i)}{z-i} \Leftrightarrow 2i(z-i) = i(z-2+3i) \Leftrightarrow 2z-2i = z-2+3i \Leftrightarrow z = -2+5i$.

b. $\overrightarrow{AE}$ a pour affixe $-2+5i-2+3i = -4+8i$, $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $i-2+3i = -2+4i$ donc $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$, les points A, B, E sont alignés.

3. $z' = i\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$ d'où en passant au module : $|z'| = |i|\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|} \Leftrightarrow OM' = 1\times\dfrac{AM}{BM}$.

4. En prenant l'argument, on a : $\arg(z') = \arg(i) + \arg\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$.

5. Si M est sur la médiatrice de $[AB]$, alors on a $AM = BM$ donc $OM' = 1$: M' appartient au cercle de centre O, de rayon 1.

6. Si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, alors $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0$ ou $\pi[2\pi]$: les points A, B, M sont alignés, le point M appartient à la droite (AB).

5. Exercice 4, 5 points (spécialistes)

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times12v + 6\times19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\,(12\times19)$.

3. a. Trouver un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12\times19$. Quel est le reste r de cette division ?