

1. Classique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par : $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1. Déterminer la limite de f quand x tend vers 0, x réel positif. Qu'en déduit-on pour C ?

2. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à la droite D.

b. Déterminer la limite de f en $-\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote oblique pour C en $-\infty$.

3. a. Calculer, pour tout x réel non nul, le nombre dérivé $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = 2 \frac{\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

4. Tracer la courbe C et ses asymptotes.

5. a. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x > 0$, $f(x) = ax + b + \frac{ce^x}{e^x - 1}$.

b. Hachurer la partie du plan limitée par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. Déterminer l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.

2. C14

Les êtres vivants contiennent du carbone 14 radioactif (constamment renouvelé) qui se maintient à la valeur de 15,3 unités.

À leur mort, ce carbone 14 n'est plus renouvelé ; il est désintégré à une vitesse proportionnelle, à tout instant, au carbone 14 encore présent dans l'organisme. On montre que le coefficient de proportionnalité est voisin de 0,123.

Ainsi, la radioactivité du carbone 14 présent dans un organisme à l'instant t après sa mort (t exprimé en milliers d'années), notée $f(t)$, vérifie les deux conditions : $f'(t) = -0,123f(t)$ et $f(0) = 15,3$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' = -0,123y$ et $y(0) = 15,3$.

2. On trouve dans une grotte des débris d'os présentant une radioactivité égale à 10,2 unités. Estimer l'âge de ces débris.

3. Lorsque la radioactivité devient inférieure à 1% de sa valeur initiale, le calcul de $f(t)$ est entaché de trop d'incertitude pour permettre de dater raisonnablement à l'aide du carbone 14. Trouver à partir de quel âge un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.