Devoir surveillé 2 **Analyse** **2 heures**

1. Primitives et ln

a. Déterminer toutes les primitives de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

b. Déterminer la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.

2. Fonction+aire+suite

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

c. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormal.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

a. Vérifier que, pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.

b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

3. Logarithmes

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$. Étudier son signe sur $]0\,;+\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;+\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

3. En déduire que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 1$ est asymptote à la courbe C.

d. Étudier la position relative de C et Δ sur $]0\,;+\infty[$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.

d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.