

1. Superbasique**Partie A**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2 + \ln x}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $-2 + \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

3. On note I le point d'intersection de C et de l'axe $(O; \vec{i})$. Déterminer les coordonnées du point I .

4. On note T la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 1. Déterminer une équation de la droite T .

5. Tracer, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C et la droite T .

On prendra 1 cm pour unité graphique sur l'axe $(O; \vec{i})$ et 5 cm pour unité graphique sur l'axe $(O; \vec{j})$.

Partie B

1. a. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = (\ln x)^2$. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Calculer $g'(x)$.

b. En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. a. Calculer $J = \int_1^e f(x) dx$ où f est la fonction définie dans la partie A.

b. Interpréter graphiquement l'intégrale J .

2. Vrai Faux à justifier

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{5x}\right)$. On appelle D l'ensemble de définition de f , D' l'ensemble de définition de sa dérivée f' et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $D = \mathbb{R} - \left[-\frac{2}{3}; 0\right]$.

2. Pour tout $x \in D$, on a $f(x) = \ln(3x+2) - \ln x - \ln 5$.

3. Pour tout $x \in D'$, on a $f'(x) = \frac{3}{5} \times \frac{5x}{3x+2}$.

4. $D' = \mathbb{R} - \left\{0; -\frac{2}{3}\right\}$.

5. On a $f(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.

6. La fonction $F(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right) \ln\left(x + \frac{2}{3}\right) - x \ln x - x \ln \frac{3}{5}$ est une primitive de f sur D .

7. La courbe C a 3 asymptotes : deux verticales (en 0 et $-2/3$) et une horizontale $y = \ln \frac{3}{5}$.