Devoir n°7 **Mathématiques** **1 heure**

Suite homographique

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2-u_n}$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. Représenter graphiquement les premiers termes de u_n (n en abscisse, u_n en ordonnée). Quelles conjectures émettez-vous ?

4. On admet que, pour tout n, u_n n'est pas nul. On pose $v_n = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

a. Calculer v_0, v_1, et v_2.

b. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique.

c. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

d. Pouvez vous valider les conjectures du 3 ?

Ouaip, c'est une suite mon gars !

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{(n+1)(u_n - 3n)}{n}$.

1. Calculer u_2, u_3, u_4.

2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

4. En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée. Limite ?

Y fait chô

On admet que si on mélange deux litres d'eau à la température T et un litre d'eau à la température T', on obtient deux litres d'eau à la température $\dfrac{2T+T'}{3}$.

On dispose de deux litres d'eau à la température $T_0 = 80$ °C ; on lui ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient 3 litres à la température T_1.

On répète le processus : on prélève deux litres sur les 3 obtenus, auxquels on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient 3 litres à la température T_3.

1. On fabrique ainsi une suite (T_n) telle que T_{n+1} est la température du mélange de 2 litres d'eau à la température T_n et d'un litre d'eau à la température 20°C.

a. Calculer T_1, T_2 et T_3.

b. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

2. Soit la suite (u_n) telle que pour tout n, $u_n = T_n - 20$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer u_n puis T_n en fonction de l'entier n.

d. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le premier rang n à partir duquel $T_n \leq 21$.