Devoir n°4 — Mathématiques — 2 heures

1. Tangentes (2 points)

Déterminer à l'aide de l'algorithme approprié le nombre dérivé et une équation de la tangente à la courbe de f en a :

1. $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$ et $a=1$.

2. $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x-2$ et $a=2$.

2. Résoudre (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{2x+1}{x-1}+\dfrac{x-7}{x+3}\geq 0$

2. $\begin{cases}(2x+5)(1-x)\geq 0\\ 8x^2+10x-3>0\end{cases}$

3. Cercle et tangente (3 points)

Soit Γ le cercle de centre $O(3, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4, 3).

1. Vérifiez que A est un point du cercle et déterminer l'équation de la tangente à Γ passant par A.

2. La droite D d'équation $y=2x-5$ coupe Γ. Déterminer les points d'intersection de D et Γ.

4. Distance d'un point à une droite (5 points)

Soient les points $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;2)$ du plan.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Déduisez-en que $x-5y+7=0$ est une équation de la droite (AB).

2. Soit D le point de coordonnées (1 ; 1). Vérifiez que D n'est pas sur (AB). On cherche la distance de D à (AB), soit la distance DH où H est le projeté orthogonal de D sur (AB).

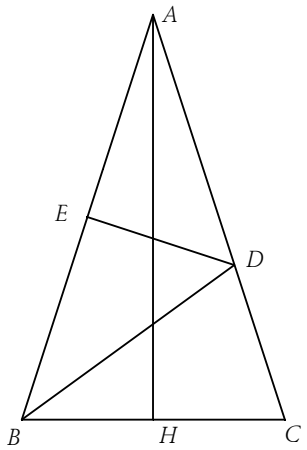
3. a. Montrez que le produit scalaire $\overrightarrow{DH}.\vec{n}$ vaut -3 ; on posera que H a pour coordonnées (x ; y) et on utilisera le fait que H est sur (AB).

b. En utilisant le fait que $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, montrez que $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\pm DH.\sqrt{26}$.

c. Déduisez-en la distance DH.

5. Un triangle très spécial (4 points)

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que $BC = 1$ et les angles à la base vérifient $\hat{B}=\hat{C}=72°$; (BD) est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$; E est le milieu de [AB] et H celui de [BC] (figure ci-dessous, inutile de la refaire).



1. a. Montrer que les triangles BCD et BDA sont isocèles.

b. En déduire que $BC = BD = AD = 1$.

c. En déduire que (ED) est perpendiculaire à (AB).

2. On pose $AB = x$. Exprimer cos 36° et sin 18° en fonction de x en utilisant des triangles rectangles convenables.

3. a. En utilisant la formule $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$, montrer que x vérifie l'équation $x^3-2x^2+1=0$.

b. Développer $(x-1)(x^2-x-1)$ et résoudre l'équation ci-dessus.

4. En déduire en les justifiant les valeurs exactes de cos 36°, sin 36°, sin 18° et cos 18°.

6. Octets (2 points)

Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse en justifiant votre réponse…

En informatique, on appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble {0, 1} (exemple d'octet : 00110011). Alors il y a :

a. 8 octets se terminant par 1000.

b. 2^5 octets se terminant par 1000.

c. 256 octets possibles.

d. Il y a autant d'octets finissant par 000 que d'octets commençant par 111.