Classes de 1°S

Exercices Geometrie : barycentre

1. Alignement de points

1-1 : Quadrilatère

Dans un quadrilatère $ABCD$, on appelle I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$ et G le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC})$.

1. Montrer que G est le barycentre de $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, 2)$ et $(D, -1)$.

2. En déduire que les points I, J et G sont alignés.

1-2 : triangle 1

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Soit G le barycentre de $(A, -1)$, (B, 2) et (C, 2).

1. Montrer que G appartient à la droite (AI).

2. Soit H le symétrique de A par rapport à B.Montrer que C, G et H sont alignés.

1-3 : triangle 2

Soit ABC un triangle. On considère :

* le barycentre I de $(A ; 2)$ et $(C ; 1)$;

* le barycentre J de $(A ; 1)$ et $(B ; 2)$;

* le barycentre K de $(C ; 1)$ et $(B ; -4)$.

1. Montrer que B est le barycentre de $(K ; 3)$ et $(C ; 1)$.

2. En déduire le barycentre de $(A ; 2)$, $(K ; 3)$ et $(C ; 1)$;

3. Montrer que J est le milieu de $[IK]$.

1-4 : pentagone

Soit $ABCDE$ un pentagone tel que $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$. Les diagonales (BD) et (CE) se coupent en L.

Soit I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AE]$; soit K le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$ et $(E, 1)$.

1. Démontrer que les points A, K et L sont alignés.

2. Démontrer que $\overrightarrow{LK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{LA}$.

3. En déduire que le point K est le centre de gravité de ABD et de ACE.

2. Concours de droites

2-5 : Triangle 1

Dans un triangle ABC on définit I le barycentre de $(B, 2)$, $(C, 1)$, J le barycentre de $(A, 3)$, $(C, 2)$ et K le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 4)$.

1. Faire une figure.

2. En considérant G le barycentre de $(A, 3)$, $(B, 4)$ et $(C, 2)$, montrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes en G.

2-6 : Triangle 2

Soit ABC un triangle et I, J et K les points définis par :

$$I \text{ est le milieu de } [AB]\ ;\ \overrightarrow{JC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{JA}\ ;\ \overrightarrow{BK}=3\overrightarrow{BC}.$$

1. Déterminer les coefficients pour lesquels I est le barycentre de (A, a), (B, b), J celui de (A, a'), (C, c) et K celui de (B, b'), (C, c').

2. Démontrer que les droites (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes en G barycentre de $(A, 2)$, $(B, 2)$ et $(C, -3)$.

2-7 : Triangle 3

Soit ABC un triangle, D et E les points définis par $\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$. I est le point d'intersection des droites (AE) et (CD) et F celui des droites (BI) et (AC).

On cherche à préciser la position du point F sur (AC).

1. Déterminer les coefficients pour lesquels D est le barycentre de (A, a), (B, b) et E celui de (B, b'), (C, c').

2. Préciser les coefficients pour lesquels I est barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ).

3. En déduire la position du point F sur la droite (AC).

2-8 : Triangle 4

Soit ABC un triangle, I le milieu de [AC] et D le symétrique de B par rapport à C. Les droites (AD) et (BI) se coupent en G. Enfin, K est le point d'intersection de (AB) et (CG). On veut prouver que A est le milieu de [BK].

1. On considère D et I comme barycentres de 2 sommets du triangle ABC munis de coefficients. Préciser ces coefficients.

2. Déterminer les coefficients pour lesquels G est barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ). Conclure.

3. Géométrie Vectorielle

3-9 : parallélogramme

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On appelle E le barycentre de (A, 2) et (B, 1), F celui de (B, 2) et (C, 1), G celui de (C, 2) et (D, 1) et H celui de (D, 2) et (A, 1).

Faire une figure et montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

3-10 : Quadrilatère

Partie A

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.

1. Justifier que les systèmes $\{(A,3),(B,-2),(C,1)\}$ et $\{(A,3),(B,-2),(C,3),(C,-2)\}$ admettent un barycentre et qu'il s'agit du même barycentre que l'on notera G.

2. On note I le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BC]$. Montrer que $G=\text{bar}\{(I,3),(J,-2)\}$.

3. On note K le milieu de $[AI]$. Montrer que les droites (BK) et (IJ) se coupent en G puis le placer sur une figure.

4. Monter que le quadrilatère $ABIG$ est un parallélogramme.

Partie B

1. a. Soit M un point quelconque du plan. Justifier que le vecteur $\vec{V}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant puis montrer que pour tout point M du plan, $\vec{V}=2\overrightarrow{BI}$.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan tels que : $\|\vec{V}\|=\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$.

2. a. Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que :

$$\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|.$$

b. Construire Δ.

3-11 : Alignement

Exercice 1 : droite d'Euler

Soit ABC un triangle quelconque, O le centre du cercle circonscrit à ce triangle (point d'intersection des médiatrices), et G son centre de gravité. Soit H le point défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

1. a. Soit A' le milieu de [BC]. Démontrer que $\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

b. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont colinéaires.

c. Déduire de a. et b. que AH est une hauteur du triangle ABC.

2. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit M un point quelconque du plan.

a. Démontrer que $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

b. Déduire des questions précédentes que les points O, G et H sont alignés.

Exercice 2

ABC est un triangle de centre de gravité G (isobarycentre de A, B, C). On appelle I le milieu de $[BC]$. La parallèle à (BC) menée par G coupe (AC) en E.

1. Faire la figure et construire le point D défini par $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Trouver les coefficients a et b tels que E soit le barycentre de (A, a) ; (C, b).

3. Montrer que B est le barycentre de $(A, 1)$; $(D, 1)$.

4. Montrer que I est le barycentre de $(A, 1)$, $(D, 1)$ et $(C, 2)$. En déduire que les points I, D et E sont alignés. Préciser la position de I sur $[DE]$.

Exercice 3

Dans un triangle ABC, soit E le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et soit A' le milieu de $[BC]$.

1. Exprimer le point E comme barycentre des points A et B.

2. Exprimer le point A' comme barycentre des points B et C.

3. On considère le point I barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

a. Montrer que I est le milieu de $[AA']$.

b. Montrer que les points I, E et C sont alignés.

Exercice 4

ABC est un triangle, J est le milieu de $[AC]$, K celui de $[JB]$, et I le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

On se propose de démontrer de deux façons différentes que les points C, K et I sont alignés.

1. A l'aide du calcul vectoriel.

a. Montrer que $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

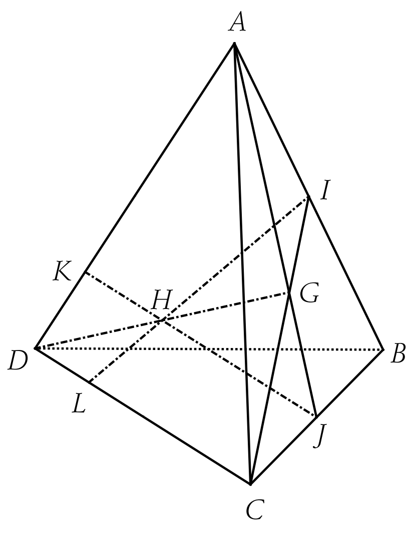
b. Montrer que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

c. En déduire que C, K et I sont alignés.

2. A l'aide de barycentres.

a. Exprimer le point I comme barycentre de A et B.

b. En considérant le barycentre de $(A ; 1)$, $(B ; 2)$ et $(C ; 1)$, montrer que C, K et I sont alignés.



Exercice 5

ABC est un triangle, O est le milieu de $[BC]$, J celui de $[AC]$, I est le point tel que $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ et K le point tel que $3\overrightarrow{KI} = -2\overrightarrow{KJ}$.

Le but de cet exercice est de démontrer que les points A, K et O sont alignés.

1. Exprimer I comme barycentre de A et B ; exprimer J comme barycentre de A et C puis exprimer K comme barycentre de I et J.

2. Construire les points O, I, J et K.

3. Montrer que les points A, K et O sont alignés.

3-12 : Cône

Soit $A\left(0\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\,;-\frac{\sqrt{6}}{2}+1\,;1\right)$ et $C\left(1\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ trois points de l'espace.

1. a. Déterminer une équation du cône (**C**) de sommet O d'axe zz' et passant par A.

b. Les points B et C appartiennent-ils à (**C**) ?

2. a. Calculer les longueurs des segments [AB], [AC] et [BC].

b. En déduire que le triangle ABC est rectangle.

4. Lignes de niveau et lieux géométriques

4-13 : Triangle rectangle

On se donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A, tel que $AB = 2a$ et $AC = a$ où a est une longueur donnée.

1. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|.$$

2. On désigne par H le point du plan tel que $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

a. Montrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b. On considère l'ensemble des points du plan tels que $-3MA^2+MB^2+4MC^2=k$. Pour quelle valeur de k cet ensemble contient-il le point A ? Préciser l'ensemble alors obtenu et construisez le.

4-14 : Lignes de niveau - 1

ABC est un triangle.

1. Construire le barycentre G de (A, 1) ; (B, 2) et (C, 3) ; M étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de MG.

2. Construire le barycentre K de (A, 8) ; (B, −1) et (C, −1) ; M étant un point quelconque du plan, exprimer $\left\|8\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ en fonction de MK.

3. Quel est l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|8\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$? Le construire.

4. Exprimer plus simplement le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$. Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$. Vérifier que C appartient à Γ. Déterminer et construire Γ.

4-15 : Lignes de niveau - 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.

1. Déterminez les coefficients α, β, γ tels que D soit le barycentre du système (A, α) ; (B ; β) et (C ; γ).

2. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$.

4-16 : Ligne de Niveau - 5

A, B et C sont trois points non alignés tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 4$. I est le milieu de [BC]. J est défini par $\overrightarrow{BJ}=-2\overrightarrow{BC}$.

G est le barycentre de (A ; 1), (B ; 3) et (C ; –2).

1. Exprimer le point J comme barycentre des points B et C.

2. a. Montrer que G est le barycentre des points A et J.

b. En déduire la position de G sur le segment $[AJ]$.

3. a. Exprimer, pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

b. Exprimer alors en fonction d'une seule distance la norme $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$.

d. Tracer l'ensemble Γ.

4. a. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que : $(3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC})\cdot\overrightarrow{MA}=0$.

b. Justifier que le point I appartient à l'ensemble Δ puis tracer l'ensemble Δ.

5. a. Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

b. En déduire $\cos\widehat{ABJ}$.

6. K est le milieu de $[AB]$. Calculer la longueur JK.

5. Divers

5-17 : Triangle

Soit ABC un triangle, I le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 2)$, J celui de $(A, -3)$, $(C, 2)$ et K celui de $(B, 1)$, $(A, -3)$. Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont parallèles.

5-18 : Parallélogramme

Soient A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(3 ; 3)$, $(-1 ; -1)$, $(-2 ; -3)$ et $(3 ; -3)$.

1. Déterminer les coordonnées du point E tel que $BCDE$ soit un parallélogramme.

2. Déterminer les coordonnées du barycentre G des points $(A, 2)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$ et $(E, 1)$.

3. Soit L le centre du parallélogramme $BCDE$.

a. Démontrer que A, G et L sont alignés.

b. Démontrer que $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$.

c. Que représente le point G pour le triangle ABD ? et pour le triangle AEC ?

4. a. Déterminer les coordonnées de I milieu de $[AB]$ et J milieu de $[AE]$.

b. Démontrer l'alignement de I, G et D et celui de C, G et J.

5-19 : Hauteurs - 1 (c)

Soit ABC un triangle ayant ses angles aigus et A', B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C.

1. Prouver que $\dfrac{\tan\hat{B}}{\tan\hat{C}}=\dfrac{A'C}{A'B}$.

2. En déduire que A' est le barycentre de $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{C})$.

3. Quel est le barycentre du système de points $(A, \tan\hat{A})$, $(B, \tan\hat{B})$ et $(C, \tan\hat{C})$?

5-20 : Hauteurs - 2 (c)

On considère un triangle isocèle ABC de côtés $BC = 2a$, $AC = AB = 3a$, a étant un réel strictement positif. On note A' le milieu de $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle.

1. Soit α une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que $\cos\alpha=\dfrac{7}{9}$.

2. Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Calculer $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$. En déduire deux réels u et v tels que B' soit le barycentre du système $\{(A, u) ; (C, v)\}$.

3. En s'aidant de la deuxième question, déterminer trois réel a, b, c tels que H soit le barycentre du système $\{(A, a) ; (B, b) ; (C, c)\}$.